УДК 519.6

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Абрегов М.Х.[1], Богатырев А.А.[1], Канчукоев В.З.[1]

[1] ФГБОУ ВПО *«Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

Решение краевых задач для нагруженного линейного дифференциального уравнения второго порядка, а также разработка численных методов их решения приводит к необходимости исследования локальных краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля. К такой же проблеме приводит решение нелокальных краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и конечно-разностной постановках. В данной работе исследуется поведение решения первой краевой задачи для оператора Штурма-Лиувилля. Для получения поточечной оценки решения поставленной задачи применяется его представление с помощью функции Грина. Для оценки линейно-независимых решений однородного оператора Штурма-Лиувилля, определяющих функцию Грина, используется теорема сравнения Штурма и ее следствия. В работе также получена равномерная оценка решения исследуемой задачи, которая усиливает известную оценку в равномерной метрике.

Ключевые слова: первая краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля, теорема сравнения Штурма, поточечная оценка решения, равномерная оценка.

ESTIMATES OF SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE

Abregov M.H.[1], Bogatyrev A.A.[1], Kanchukoev V.Z.[1]

[1] *"Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov "Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

Solution of boundary value problems for linear loaded differential equation of the second order, and the development of numerical methods for solving them makes it necessary to study the local boundary value problems for the Sturm-Liouville problem. By the same problem resulting solution nonlocal boundary value problems for the Sturm-Liouville differential and finite-difference formulations.In this paper we study the behavior of solutions of the first boundary value problem for the Sturm-Liouville problem. For point-wise estimates of the solution of the problem applies its representation via Green's function. To assess the linearly independent solutions of a homogeneous Sturm-Liouville determining the Green's function is used Sturm comparison theorem and its consequences. The paper also obtained uniform estimate of the solution of the problem, which enhances the well-known estimate in the uniform metric.

Keywords: first boundary value problem for the Sturm-Liouville; Sturm comparison theorem, pointwise estimate of the solution, the uniform estimate.

Исследование на разрешимость неклассических краевых задач для линейного дифференциального уравнения второго порядка, а также локальных краевых задач для нагруженного линейного дифференциального уравнения приводит к необходимости поточечной оценки решения локальных краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля.

В настоящей работе исследуется поведение решения краевой задачи первого рода

$$(k(x)u')' - g(x)u = -f(x), \qquad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \qquad (2)$$

где коэффициенты и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условиям $k(x) \in C^1[0,1]$, $f(x),\ g(x) \in \mathrm{C}^{(0)}[0,1]$, $0 < g_0 \le g(x) \le \bar{g}$,

$0 < c_1 \leq \ k(x) \leq c_2$ всюду на $[0,1]$. Как известно, при условиях , $0 \leq g(x)$, задача $(1),(2)$ однозначно разрешима в классе функций $C^2[0,1]$ и для её решения имеет место априорная оценка в равномерной метрике

$$\|u\|_c \leq \frac{1}{4c_1}\|f\|_c. \qquad (3)$$

Знание верхних оценок $k(x)$ и $g(x)$, в случае знакоопределенности правой части $f(x)$, позволяет получить поточечную оценку $u(x)$, которая применяется для усиления оценки (3).

Получим оценку решения задачи $(1),(2)$ в точке $\xi \in (0,1)$. С этой целью воспользуемся представлением этого решения [3],[4]

$$u(\xi) = \int_0^1 G(x,\xi) f(x)\, dx, \qquad (4)$$

где $G(x,\xi)$ − функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1).

Функция $G(x,\xi)$ определяется по формуле:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{a}\begin{cases} v_1(x)v_2(\xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ v_1(\xi)v_2(x), & \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \qquad (5)$$

где $v_1(x), v_2(x)$ − решения задач

$$(k(x){v_1}')' - g(x)v_1 = 0, \quad v_1(0) = 0, \quad v_1(1) = 1, \qquad (6)$$

$$(k(x){v_2}')' - g(x)v_2 = 0, \quad v_2(0) = 1, \quad v_2(1) = 0. \qquad (7)$$

Постоянная a в (5) определяется по формуле

$$a = -k(\xi)(v_1(\xi){v_2}'(\xi) - {v_1}'(\xi)v_2(\xi)).$$

В силу краевых условий,

$$a = k(0){v_1}'(0) = -k(1){v_2}'(0). \qquad (8)$$

Рассмотрим два уравнения:

$$(p_1(x)u')' + q_1(x)u = 0, \qquad (9)$$

$$(p_2(x)u')' + q_2(x)u = 0, \qquad (10)$$

где функции $p_1(x), p_2(x), q_1(x)$ и $q_2(x)$ вещественны и непрерывны на интервале J и $p_1(x) \geq p_2(x) > 0, q_1(x) \leq q_2(x)$. При этих условиях уравнение (10) называется мажорантой Штурма [5] для уравнения (9).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнений (9) и (10) непрерывны на* $[x_0, l]$ *и пусть уравнение* (10) *является мажорантой Штурма уравнения (9). Предположим, что* $u_1(x)$ *и* $u_2(x)$ *являются решениями уравнений (9) и* (10) *соответственно, всюду на отрезке* $[x_0, l]$ *удовлетворяют соотношениям:*

$$u_1(x){u'}_1(x) > 0, \quad u_2(x){u'}_2(x) > 0, \qquad (11)$$

и в точке $x = x_0$ *выполнено неравенство*

$$0 \le \frac{u_1(x_0)}{p_1(x_0)u'_1(x_0)} \le \frac{u_2(x_0)}{p_2(x_0)u'_2(x_0)}. \qquad (12)$$

Тогда всюду на $[x_0, l]$

$$\frac{u_1(x)}{u_1(l)} \le \left[\frac{u_2(x)}{u_2(l)}\right]^{\frac{m_2}{M_1}}, \qquad (13)$$

где

$$m_2 = \min_{[x_0,l]} p_2(x)\,, M_1 = \max_{[x_0,l]} p_1(x)\,.$$

Доказательство этой теоремы приводится в [1].

Пусть $y(x)$ – решение задачи

$$(c_1 y')' = 0, \;\; 0 < x < 1, (14)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = v'_1(0).$$

Применив к задачам (6) и (14) теорему 1, получаем оценку

$$0 \le v_1(x) \le x^{\frac{c_1}{c_2}}, 0 \le x \le 1. (15)$$

Для решения задачи (7) имеет место оценка

$$0 \le v_2(x) \le (1-x)^{\frac{c_1}{c_2}}, \;\; 0 \le x \le 1. \qquad (16)$$

Пусть $y(x)$ – решение задачи

$$(c_1 y')' = 0, \;\; 0 < x < 1, (17)$$

$$y(\xi) = 0, c_1 y'(\xi) = -1.$$

Применяя на отрезке $[0, \xi]$ тождество Лагранжа к задачам (6) и (17), получаем оценку

$$v_1(\xi) < k(0) v_1{}'(0) \frac{\xi}{c_1}. \qquad (18)$$

Для решения задачи (7) имеет место оценка

$$v_2(\xi) \le \frac{k(0) v_1{}'(0)}{c_1}(1-\xi). \qquad (19)$$

Теорема 2. *Пусть* $k(x) \in C^1[0,1]$, $f(x), g(x) \in C^{(0)}[0,1]$, $0 \le g(x) \le \bar{g}, 0 < c_1 \le k(x) \le c_2$*всюду на* $[0,1]$. *Тогда для решения задачи* $(1),(2)$ *имеет место оценка*

$$|u(\xi)| \le \frac{1}{2c_1}\left[\xi^2(1-\xi)^{\frac{c_1}{c_2}} + \xi^{\frac{c_1}{c_2}}(1-\xi)^2\right] \|f\|_c \,. \qquad (20)$$

Доказательство. Воспользуемся представлением решения задачи $(1),(2)$ с помощью функции Грина:

$$u(\xi) = \int_0^1 G(x,\xi) f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\xi} v_1(x) v_2(\xi) f(x) dx + \frac{1}{a}\int_{\xi}^{1} v_1(\xi) v_2(x) f(x) dx, \qquad (21)$$

где $v_1(x)$ и $v_2(x)$ − решения задач (6) и (7), а постоянная a вычисляется по формуле (8).
Из (21) получаем с учетом оценок (15), (16), (18), (19):

Теорема доказана.

Правая часть неравенства (22) примет наибольшее значение при $\xi = \frac{1}{2}$. Следовательно, для всех $\xi \in [0,1]$ имеет место оценка

$$|u(\xi)| \le \frac{1}{2^{\frac{c_1}{c_2}}} \frac{1}{4c_1} \|f\|_c,$$

откуда для задачи следует априорная оценка

$$\|u\|_c \le \frac{1}{2^{\frac{c_1}{c_2}}} \frac{1}{4c_1} \|f\|_c. \qquad (23)$$

Список литературы

1. Абрегов, М.Х. Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений и некоторые их приложения. Дис. на соискание ученой степени к.ф.-м.н., Нальчик 1998г.
2. Абрегов, М.Х. Об оценке решений краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля. Вестник КБГУ, серия математические науки, выпуск 2, Нальчик 1998г.
3. Карташев, А.П., Рождественский, Б.Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1976г.
4. Тихонов, А.Н., Васильева, А.Б., Свешников, А.Г., Дифференциальные уравнения. М: Наука, 1980.
5. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1980.

Рецензенты:
Шхануков-Лафишев М.Х., д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН г. Нальчик;
Ашабоков Б.А. д.ф.-м.н., профессор Высокогорного Геофизического Институт, г. Нальчик.