

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Шайлиев Р.Ш., Биджиев С.Х., Кидакоев А.М., Лепшоков Р.А., Лепшокова С.А.

Карачаево-Черкесский институт гражданского проектирования, Черкесск, Россия (369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36) kchgtanich@mail.ru

В работе описана математическая модель упругого поля напряжений неоднородной анизотропной среды: выведены формулы, определяющие упругое поле напряжений криогенной горной породы в зависимости от концентрации и пространственной ориентации ледяных включений. Суть исследований заключается в расчете эффективного упругого модуля характерного объема материала путем осреднения по всем реализациям случайного поля неоднородностей, с учетом их концентрации и пространственной ориентации. В работе были использованы методы: теории обобщенных функций, тензорного исчисления, теории уравнений математической физики и интегро-дифференциальных уравнений. Проведена численная реализация на ЭВМ, полученные данные представлены в виде графического материала. Из анализа графического материала определено, что предел прочности породы зависит от преимущественной ориентации текстурных составляющих.

Ключевые слова: разрушение, математическая модель, мерзлый уголь, эффективный модуль упругости, эллипсоидальные неоднородности

ON ONE MODEL OF TENSION OF HETEROGENEOUS ANISOTROPIC SUBSTANCE

Shailiev R.S., Bidzhiev S.K., Kidakoev A.M., Lepshokov R.A., Lepshokova S.A.

Karachaevo-Circassian institute of civil design, Cherkessk, Russia (369000, Cherkessk, Stavropoliskay str. 36) kchgtanich@mail.ru

The project describes a mathematical model of elastic tension fields of heterogeneous anisotropic substance: there were derived formulas that determine elastic tension fields of cryogenic subsurface rock, depending on the concentration and orientation of ice inclusions. The essence of search consists in calculation of effective elastic module of typical volume of materials by sickens the mean to all realization of accidental nonsimilarity field, taking into account their concentration and spatial orientation. Such methods was used in the work: the theory of generalized functions, tensors calculations, the theory equations of mathematical physics and integrodifferential equations. A numerical implementation was carried out on a ECM and the result was represented in a form of a drawing. The analysis of the drawing has determined that the break point of the rock depends on the preferred orientation of textural components.

Keywords: destruction, mathematical model, frozen coal, effective module of elasticity, ellipsoid nonsimilarity

При добыче полезных ископаемых в районе вечной мерзлоты существует проблема устойчивости частично протаявших горных пород, в частности целиков, оставляемых в выработках при камерно-столбовой разработке.

Для решения этой проблемы рассмотрим следующую модель мерзлой горной породы: трехмерная, неоднородная анизотропная среда – соответствующая горной породе, с эллипсоидальными неоднородностями, которым соответствуют ледяные включения. Ледяные включения разнесены по пространству горной породы и имеют различные пространственные ориентации. Структурные составляющие горной породы и ледяные включения, испытывающие большие растягивающие напряжения при одноосном сжатии мерзлой породы, будем считать «благоприятно» ориентированными, а не испытывающие растягивающих напряжений – «неблагоприятно» ориентированными.

Эффективный модуль податливости S_3 и эффективный модуль упругости определены следующим образом:

$$\begin{aligned} S_3 &= \langle (I + AC_1)^{-1} \rangle \langle C(I + AC_1)^{-1} \rangle^{-1} \\ C_3 &= \langle C(I + AC_1)^{-1} \rangle \langle (I + AC_1)^{-1} \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

где I – единичный тензор,

C – постоянный тензор модуля упругости структурной составляющей,

$C_l = C - \langle C \rangle$ – случайный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности,

$A = \frac{1}{4\pi} \int k_0 dS_n$ – постоянный тензор,

$$\langle C \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C(\varphi, \theta, \psi) f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \quad - \text{осредненное значение}$$

модуля упругости,

$f(\varphi, \theta, \psi)$ – функция распределения структурных составляющих по ориентациям.

Обозначим через $\varepsilon(r)$ непрерывное внешнее поле деформаций, которое при заданных внешних силах (включая условия на бесконечности) существовало бы при $C_l = 0$ в однозначной среде, и через $\varepsilon(r)$ – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при таких же внешних условиях.

Используя метод эквивалентного поля (МЭП), изложенный в неявной форме в работах Валпола и Левина [1, 5], и проведя серию преобразований, подробно описанную в работах [2, 3], получим формулу, определяющую эффективный модуль податливости криогенной горной породы.

$$S_{3\phi} = S_3 - S_3 \left\langle \frac{V_3}{V} C_1 (I + AC_1)^{-1} \right\rangle \left[I + \frac{1}{n} \int K(R) \Phi_2(R) dV' \right]^{-1} S_3, \quad (2)$$

где S_3 – эффективный модуль податливости основной среды;

V_3 – объем породы, приходящийся на одно ледяное включение;

n – концентрация ледяных включений;

$K(R) = -def G_0 def$ – оператор, имеющий ядро $-K_{ijkl}(R) = -[v_i v_j G_{kl}(R)]_{(ik)(jl)}$;

$G(R)$ – функция Грина;

$\Phi_2(R)$ – функция распределения ледяных включений по пространству породы.

Для построения функции $\Phi_2(R)$ под интегралом в данном выражении необходимо задаться конкретной моделью случайного поля неоднородностей, т.е. ледяных включений в среде.

Определяя напряжение в рамках того же метода эквивалентного поля, имеем:

$$\sigma = \left(S_{\vartheta} - S_{\vartheta} < \frac{V_{\vartheta}}{V} C_1 (I + AC_1)^{-1} > [I + \frac{1}{n} \int K(R) \Phi_2(R) dV^1]^{-1} S_{\vartheta} \right)^{-1} \times \\ \times (I + AC_1)^{-1} (I + \frac{1}{n} \int K(R) \Phi_2(R) dV)^{-1} \cdot S_{\vartheta\phi} \sigma_0 \quad (3)$$

Поскольку $S_{\vartheta} - S_{\vartheta} < \frac{V_{\vartheta}}{V} C_1 (I + AC_1)^{-1} > [I + \frac{1}{n} \int K(R) \Phi_2(R) dV^1]^{-1} S_{\vartheta}$

представляет собой эффективный модуль податливости криогенной горной породы, то, упрощая, (3) запишем в матричном виде:

$$\sigma_i = (I_{ij} + A_{ik} C_{kj}^{B1})^{-1} (I_{jk} + B_{jk}) \sigma_k^0, \quad (4)$$

где I_{ij} – единичная матрица $i, j = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$;

$$A = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} K & L & L & 0 & 0 & 0 \\ L & K & L & 0 & 0 & 0 \\ L & L & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} K &= 7C_{11}^{o\vartheta} - 3C_{12}^{o\vartheta}, \\ M &= -2(C_{11}^{o\vartheta} - C_{12}^{o\vartheta}), \\ L &= 9C_{11}^{o\vartheta} - 3C_{12}^{o\vartheta}, \\ N &= 15C_{11}^{o\vartheta} (C_{11}^{o\vartheta} - C_{12}^{o\vartheta}), \end{aligned}$$

$C_{ij}^{o\vartheta}$ – эффективный модуль упругости основной среды;

$C_{ij}^{B\vartheta}$ – эффективный модуль упругости ледяного включения;

$$C_{kj}^{B1} = C_{ij}^{B\vartheta} - C_{ij}^{o\vartheta}, \quad B_{jk} = \frac{1}{n} \int K(R) \Phi_2(R) dV,$$

Мы получили общее выражение для определения поля напряжений в криогенных горных породах.

Произведены численные расчеты $\sigma_i(\varphi\theta\psi)$ через $\frac{\pi}{6}$ по всем углам Эйлера для угля шахты «Центральная» Сангарского месторождения. Для наглядности полученные значения представлены в виде графиков (1, 2, 3, 4). Заметим, что величины касательных напряжений на два порядка меньше, чем величины нормального напряжения σ_2 , поэтому нецелесообразно изображать их на графике.

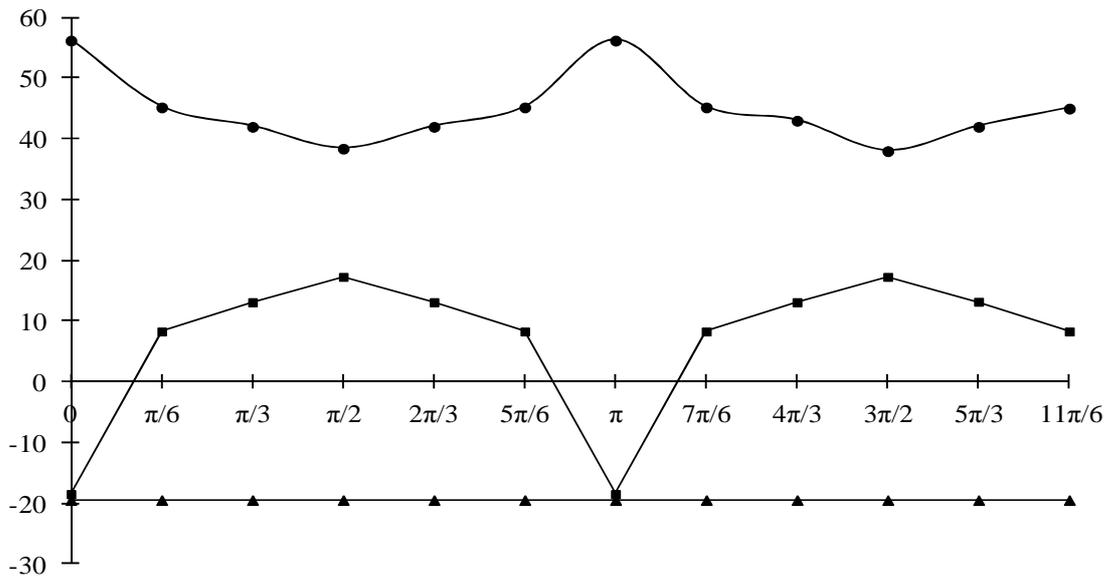


Рис. 1. График зависимости тензоров напряжения $\sigma_i(0,0,\psi)$ ледяного включения от его пространственной ориентации

● --- $\sigma_1(0,0,\psi)$, ■ --- $\sigma_2(0,0,\psi)$, ▲ --- $\sigma_3(0,0,\psi)$

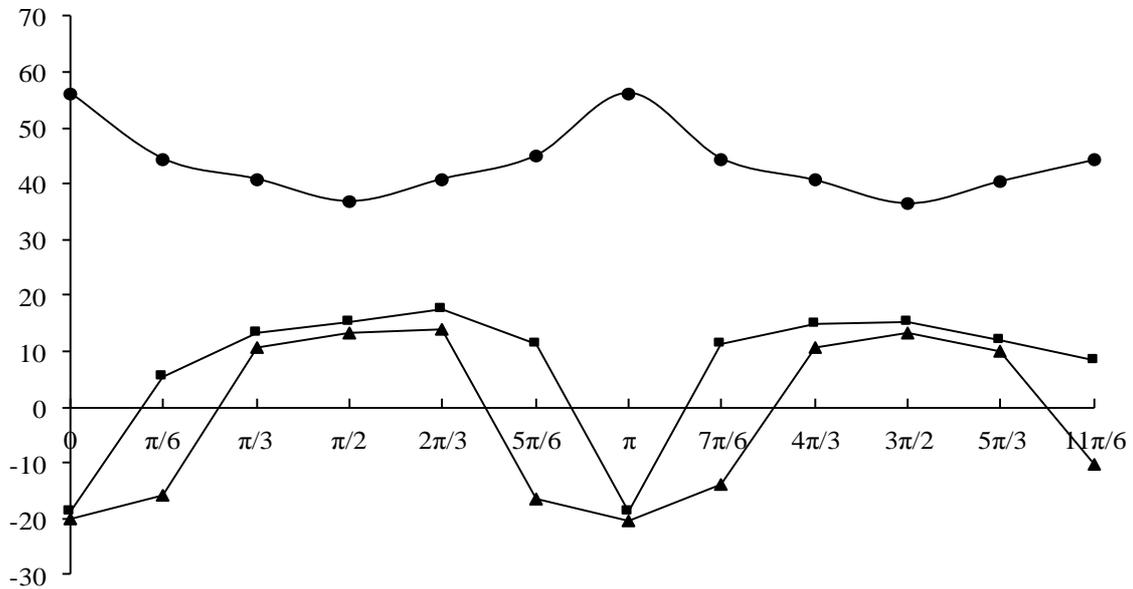


Рис. 2. График зависимости тензоров напряжения $\sigma_i(0,\pi/6,\psi)$ ледяного включения от его пространственной ориентации

● --- $\sigma_1(0,\pi/6,\psi)$, ■ --- $\sigma_2(0,\pi/6,\psi)$, ▲ --- $\sigma_3(0,\pi/6,\psi)$

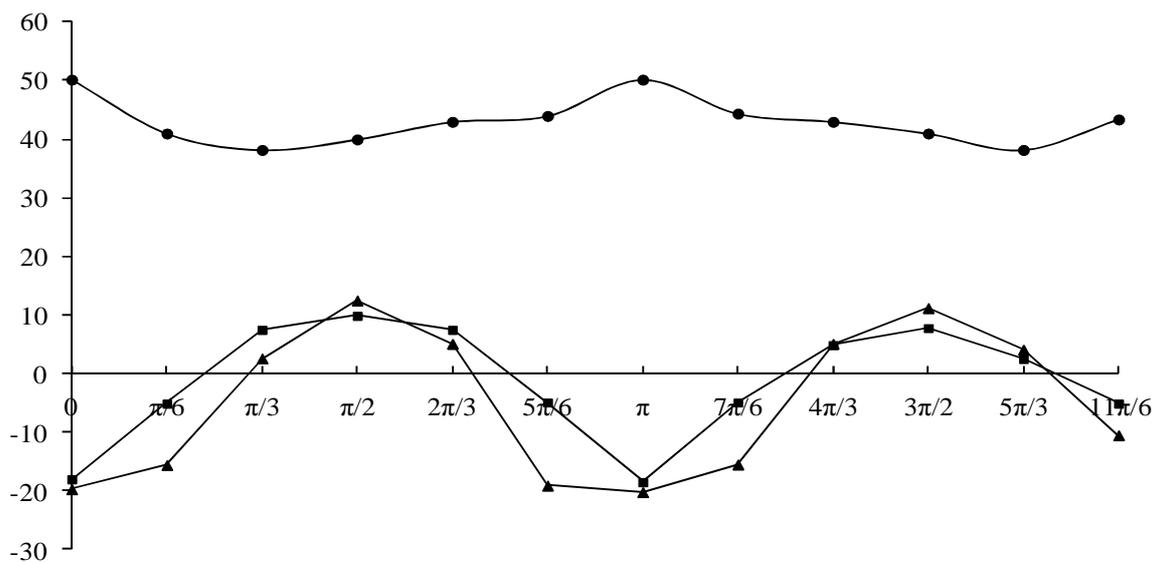


Рис. 3. График зависимости тензоров напряжения $\sigma_i(0, \pi/3, \psi)$ ледяного включения от его пространственной ориентации

● --- $\sigma_1(0, \pi/3, \psi)$, ■ --- $\sigma_2(0, \pi/3, \psi)$, ▲ --- $\sigma_3(0, \pi/3, \psi)$

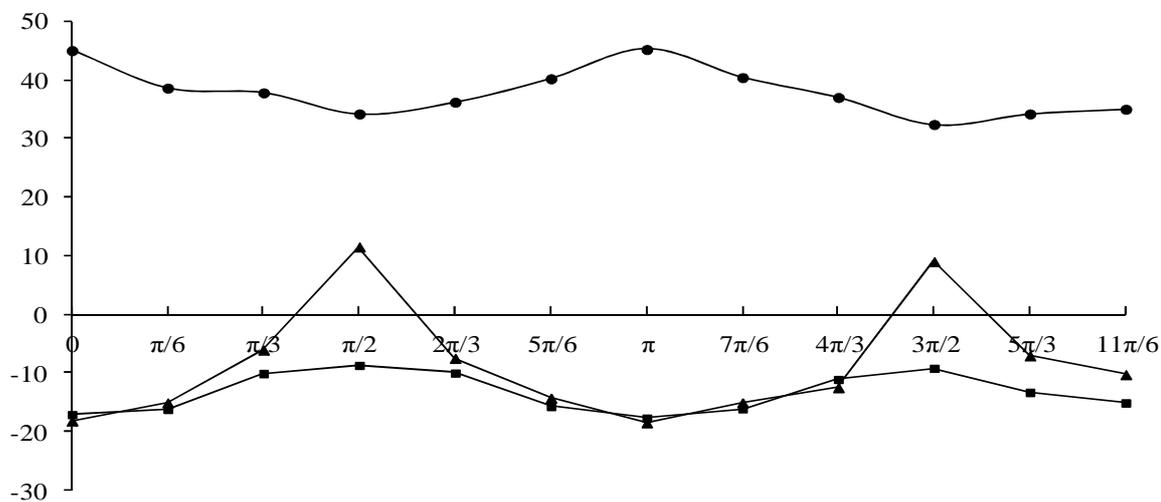


Рис. 4. График зависимости тензоров напряжения $\sigma_i(0, \pi/2, \psi)$ ледяного включения от его пространственной ориентации.

● --- $\sigma_1(0, \pi/2, \psi)$, ■ --- $\sigma_2(0, \pi/2, \psi)$, ▲ --- $\sigma_3(0, \pi/2, \psi)$

Из графиков очевидно, что предел прочности породы зависит от преимущественной ориентации текстурных составляющих:

1) «благоприятно» ориентированные текстурные составляющие испытывают растягивающие напряжения - σ_1 и - σ_2 , превосходящие по величине предел прочности их на растяжение;

2) менее «благоприятно» ориентированные текстурные составляющие испытывают растягивающие напряжения - σ_1 и - σ_2 , равные пределу прочности на растяжение;

3) «неблагоприятно» ориентированные текстурные составляющие вовсе не испытывают растягивающих напряжений;

4) есть текстурные составляющие, испытывающие растягивающие напряжения либо - σ_1 , либо - σ_2 равные или превосходящие предел прочности на растяжение.

В связи с изложенным за критерий разрушения текстурных составляющих принимается критерий максимального растягивающего напряжения, несмотря на то, что мерзлая порода в целом испытывает одноосное сжатие.

Расчеты были сделаны для шахты «Центральная» Сангарского угольного месторождения. Предел прочности мерзлого угля можно считать равным $\sigma_{сж}=225 \cdot 10^5$ Па, что на 25% больше предела прочности того же угля при умеренной положительной температуре. Однако при преимущественной горизонтальной ориентации ледяных включений предел прочности может доходить до $\sigma_{сж}=280 \cdot 10^5$ Па, что видно из графиков, а при преимущественной вертикальной ориентации предел прочности уменьшается до $\sigma_{сж}=162 \cdot 10^5$ Па [4].

Таким образом, мы показали:

1) зависимость упругих свойств криогенных горных пород (на примере мерзлого угля) от упругих характеристик и концентрации ледяных включений, рассчитав эффективный упругий модуль характерного объема породы путем осреднения по всем реализациям случайного поля ледяных включений с учетом их концентрации и пространственной ориентации;

2) зависимость напряжений, наблюдаемых в криогенной горной породе, от концентрации ледяных включений и величины внешних напряжений, учитывая влияние ориентации ледяных включений на величину и характер испытываемых ими напряжений.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, по ГК № П 1105, ГК № П 1122 от 02.06.2010 г.

Список литературы

1. Левин В. М. К определению эффективных упругих модулей композитных материалов. Т. 220. — Докл. АН СССР, 1975. — № 5.
2. Шайлиев Р.Ш. Упругое поле напряжений в криогенных горных породах подверженных тепловому воздействию // Известия КБНЦ РАН. – Нальчик, № 2(7), 2001. — С. 69–72.
3. Шайлиев Р.Ш. Математическая модель расчета эффективных свойств композиционных материалов на примере полиминеральных горных пород // Современные проблемы науки и образования. – 2011. – № 5; URL: www.science-education.ru/99-4925 (дата обращения: 22.10.2015).
4. Шайлиев Р.Ш. Механизм разрушения мерзлых и частично протаявших пород на примере целиков мерзлого угля // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 5; URL: www.science-education.ru/119-15158 (дата обращения: 22.10.2015).
5. Walpole L. I. On bounds for the overall elastic module of inhomogeneous systems. i.j. Mech. Phys. Solids 14. №1, 151, 1966.

Рецензенты:

Боташев А.Ю., д.т.н., профессор, профессор кафедры «Технологические машины и переработка материалов» ФГБОУ ВПО «Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия», Министерство образования и науки РФ, г. Черкесск;

Борлаков Х.Ш., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры общинженерных и естественнонаучных дисциплин ФГБОУ ВПО «Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия», Министерство образования и науки РФ, г. Черкесск.