УДК 517.926

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ВНУТРЕННЕ-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Жабоев Ж.Ж.[1], Кумышев Р.М.[1], Кулиев Р.С.[1]

[1] ФГБОУ ВПО *«Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173), e-mail: akylman_07@mail.ru*

В работе сформулирована корректная неклассическая краевая задача для уравнения третьего порядка смешанного типа в характеристической области. Краевые условия задачи содержат как классические операторы, так и операторы, определяющие связь между значением искомой функции и ее производных внутри смешанной области и на ее границе. Как известно, краевые задачи с условиями такого типа принято называть внутренне-краевыми. Помимо этого, в постановке задачи также использованы негладкие условия сопряжения на линии изменения типа уравнения. Основной результат работы заключается в доказательстве однозначной разрешимости сформулированной задачи. При этом для доказательства единственности решения задачи был применен метод интегралов энергии. Для доказательства существования решения использовался метод интегральных уравнений и метод интегральных преобразований Лапласа.

Ключевые слова: уравнение в частных производных; внутренне-краевая задача; нелокальный оператор; единственность решения; существование решения задачи

NON-CLASSICAL INTERIOR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THIRD ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Zhaboev Z.Z.[1], Kumyshev R.M.[1], Kuliev R.S.[1]

[1] *«Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov» Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: akylman_07@mail.ru*

In the work the correct non-classical boundary-value problem for the third order equation of mixed type in the characteristic area is formulated. The boundary conditions of the problem have both classical operators, and operators which define the relationship between the value of the unknown function and its derivatives in the mixed area and on its boundary. As it is known, the boundary problem with the conditions of this type are called inner-boundary. In addition, in the formulation of the problem the non-smooth matching conditions on the line of the change of the equation type are used. The main result of the work is the proof of the one-valued solvability of the formulated problem. In this connection, to prove the one-valued solvability of the problem in the work was used the method of energy integrals. The method of integral equations and the Laplace integral transformation method were used for the corroboration of the solution existence.

Keywords: partial differential equation; inner-boundary problem; nonlocal operator; one-valued solvability; problem solution existence

Нелокальные краевые задачи для смешанных уравнений составляют широкий класс задач, теория которых интенсивно развивается на протяжении нескольких десятилетий [1-7]. Эти задачи представляют как теоретический интерес, так и обладают прикладной значимостью. Они применяются при моделировании процессов тепло- и массопереноса, описании проблем гидродинамики, решении инженерно-технических задач. В настоящей работе исследована нелокальная краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка в характеристической области, которая обобщает результаты работ [8-10] и служит продолжением исследований, начатых в работах [11-13].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xxx}+a_1(x,y)u_x+a_0(x,y)u-u_y, & y>0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), & y<0, \end{cases} \tag{1}$$

в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, A_0B_0 и B_0B прямых $x=0,\ y=h$ и $x=1$ соответственно, а также характеристиками $AC: x+y=0$ и $BC: x-y=1$ уравнения (1).

Пусть $\Omega_1=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega_2=\Omega\cap(y<0)$; $\theta_0(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{ix}{2}$, $\theta_1(x)=\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{i(x-1)}{2}$ - аффиксы точек пересечений характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x\in J\equiv AB$ с характеристиками AC, BC соответственно.

Для уравнения (1) в области Ω исследована следующая

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами:

1. $u(x,y)$ - регулярное решение уравнения (1) в Ω, $y\neq 0$;
2. $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_i),\ i=1,2$; $u(x,y)\in C^1(\overline{\Omega}_1\setminus A_0B_0)$; $u(x,y)\in C^1(\overline{\Omega}_2\setminus BC)$;

   $u(x,y)\in C^{3,1}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^{3,2}_{x,y}(\Omega_2)$;
3. $u(x,y)$ — удовлетворяет граничным условиям:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_2(y),$$
$$\left[\alpha_1(y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1(y)u(x,y)\right]_{x=x_0}=\left[\alpha_2(y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_2(y)u(x,y)\right]_{x=1}+\delta(y), \tag{2}$$

$$a(x)\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)]+b(x)\frac{d}{dx}u[\theta_1(x)]-c(x)u(x,-0)-$$
$$-d(x)u_y(x,-0)=e(x),\quad \forall x\in J, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi(x),\quad 0\le x\le 1/2,\quad 0\le y\le h \tag{4}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=\alpha(x)u(x,+0)+\gamma(x), \tag{5}$$

$$u_y(x,-0)=\beta(x)u_y(x,+0)+\delta(x)u(x,+0)+\rho(x), \tag{6}$$

где n — внутренняя нормаль. Относительно коэффициентов уравнения (1) и заданных функций здесь и в дальнейшем предполагается, что

$$a_0(x,y),\ a_1(x,y),\ a_{1x}(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1),$$
$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \varphi_3(y)\in C[0,h],\ \alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x)\in C^3(\bar{J}),$$
$$\psi(x),\ a(x),\ b(x),\ c(x),\ d(x),\ e(x),\ \delta(x),\ \rho(x)\in C^1(\bar{J}),$$
$$\alpha(x)\beta(x)\neq 0,\ a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)+d^2(x)\neq 0,\ \forall x\in \bar{J}.$$

Под регулярным будем понимать решение $u(x,y)$ уравнения (1), производные которого до порядка, входящего в уравнение, существуют и непрерывны в рассматриваемой области Ω при $y \neq 0$.

Искомую функцию $u(x,y)$ представим в виде:

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y),\ (x,y)\in\Omega_1, \\ u_2(x,y),\ (x,y)\in\Omega_2. \end{cases}$$

Пусть

$$u_1(x,0)=\tau_1(x),\ u_{1y}(x,0)=\upsilon_1(x), \tag{7}$$

$$u_2(x,0)=\tau_2(x),\ u_{2y}(x,0)=\upsilon_2(x), \tag{8}$$

тогда условия согласования примут вид

$$\tau_1(0)=\varphi_1(0),\ \tau_1'(0)=\varphi_2(0),$$
$$\alpha_1(0)\tau_1'(x_0)+\beta_1(0)\tau_1(x_0)=\alpha_2(0)\tau_1'(1)+\beta_2(0)\tau_1(1)+\delta(0),$$
$$\tau_2'(0)+\upsilon_2(0)=\sqrt{2}\psi(0).$$

Воспользуемся тем, что любое регулярное решение уравнения (1) при $y<0$ представимо в виде:

$$u(x,y)=v(x,y)+\omega(y),$$

где $v(x,y)$ — регулярное решение уравнения

$$Lv=v_{xx}-v_{yy}=0,$$

а $\omega(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, которую можно подчинить условию $\omega(0)=\omega'(0)=0$.

Решение уравнения (1) в Ω_2 представимо в виде [1]:

$$u_2(x,y)=\frac{\tau_2(x+y)+\tau_2(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\upsilon_2(t)dt+\omega(y), \tag{9}$$

где $\omega(y)=-\sqrt{2}\left[\psi(0)+\int_0^{-y}\psi(t)dt\right],\ -\frac{1}{2}\le y\le 0$.

Подставив (9) в краевое условие (3), получим функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\upsilon_2(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_2 на линию $y=0$ в виде:

$$\begin{gathered}[a(x)+b(x)]\tau_2'(x)-2c(x)\tau_2(x)= \\ =[a(x)-b(x)+2d(x)]\upsilon_2(x)+2e(x)+a(x)\omega'\left(-\frac{x}{2}\right)-b(x)\omega'\left(\frac{x-1}{2}\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Переходя к пределу в уравнении (1) при $y\to+0$, получим соотношение между $\tau_1(x)$ и $\upsilon_1(x)$:

$$\tau_1'''(x)-\upsilon_1(x)+a_1(x,0)\tau_1'(x)+a_0(x,0)\tau_1(x)=0. \tag{11}$$

На основании (7), (8) условия склеивания (5), (6) примут вид:

$$\tau_2(x)=\alpha(x)\tau_1(x)+\gamma(x), \tag{12}$$

$$\upsilon_2(x)=\beta(x)\upsilon_1(x)+\delta(x)\tau_1(x)+\rho(x). \tag{13}$$

Пусть $a(x)-b(x)+2d(x)\neq 0$, тогда (10) представимо в виде:

$$\upsilon_2(x)=q_0(x)\tau_2'(x)+q_1(x)\tau_2(x)+q_2(x), \tag{14}$$

где $$q_0(x)=\frac{a(x)+b(x)}{a(x)-b(x)+2d(x)},\ q_1(x)=-\frac{2c(x)}{a(x)-b(x)+2d(x)},$$

$$q_2(x)=\frac{b(x)\omega'\left(\frac{x-1}{2}\right)-a(x)\omega'\left(-\frac{x}{2}\right)-2e(x)}{a(x)-b(x)+2d(x)}.$$

Из (12), (13) и (14) найдем $\upsilon_1(x)$:

$$\upsilon_1(x)=\overline{\alpha}_0(x)\tau_1'(x)+\overline{\alpha}_1(x)\tau_1(x)+\overline{\alpha}_2(x), \tag{15}$$

где $$\overline{\alpha}_0(x)=\frac{\alpha(x)q_0(x)}{\beta(x)},\ \overline{\alpha}_1(x)=\frac{\alpha'(x)q_0(x)+\alpha(x)q_1(x)-\delta(x)}{\beta(x)},$$

$$\overline{\alpha}_2(x)=\frac{\gamma'(x)q_0(x)+\gamma(x)q_1(x)+q_2(x)-\rho(x)}{\beta(x)}.$$

Подставляя $\upsilon_1(x)$ из (15) в (11) и учитывая граничные условия (2), приходим к задаче для определения $\tau_1(x)$:

$$\tau_1'''(x)+\overline{a}_1(x)\tau_1'(x)+\overline{a}_0(x)\tau_1(x)=\alpha_2(x), \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\tau_1(0)=\varphi_1(0),\ \tau_1'(0)=\varphi_2(0),\\ \alpha_1(0)\tau_1'(x_0)+\beta_1(0)\tau_1(x_0)-\alpha_2(0)\tau_1'(1)-\beta_2(0)\tau_1(1)=\delta(0),\end{gathered} \tag{17}$$

где $\overline{a}_1(x)=a_1(x,0)-\overline{\alpha}_0(x)$, $\overline{a}_0(x)=a_0(x,0)-\overline{\alpha}_1(x)$.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Пусть $\alpha(x)=const=\overline{\alpha}>0,\ \beta(x)=const=\overline{\beta}>0.$

$$\varphi_1(y)=\varphi_2(y)=\delta(y)=0,\ \psi(x)=e(x)=\gamma(x)=\rho(x)=0.$$

Теорема. Если выполняются условия:

$$\begin{gathered}2c(a-b+2d)+(a+d)b'-(b-d)a'-(a+b)d'\leq 0,\\ \frac{a+b}{a-b+2d}\geq 0,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\overline{\alpha}\left[\overline{\beta}\left(a_0-\frac{a_1'}{2}\right)+\delta\right]\leq 0, \tag{19}$$

тогда $\tau_1(x)\equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\bar{J}=\int_0^1 \tau_2(x)\upsilon_2(x)dx.$$

С учетом (14) получим:

$$\bar{J}=\int_0^1 \tau_2(x)\left[q_0(x)\tau_2'(x)+q_1(x)\tau_2(x)+q_3(x)\right]dx.$$

После несложных преобразований этот интеграл можно переписать в виде:

$$\bar{J}=\frac{1}{2}\left(q_0(1)\tau_2^2(1)-q_0(0)\tau_2^2(0)\right)+\int_0^1\left(q_1(x)-\frac{1}{2}q_0'(x)\right)\tau_2^2(x)dx+\int_0^1 q_2(x)\tau_2(x)dx. \qquad (20)$$

Из условий (18) заключаем, что

$$q_0(1)\tau_2^2(1)\ge 0, \quad q_0(0)\tau_2^2(0)=0,$$

$$q_1(x)-\frac{1}{2}q_0'(x)\ge 0, \quad q_2(x)\tau_2(x)=0.$$

Таким образом

$$\bar{J}=\int_0^1 \tau_2(x)\upsilon_2(x)dx\ge 0. \qquad (*)$$

С другой стороны, из условий склеивания на основании (11) имеем:

$$\bar{J}=\int_0^1 \tau_2(x)\upsilon_2(x)dx=$$

$$=\int_0^1 \alpha(x)\tau_1(x)\left(\left[\beta(x)\left\{\tau_1'''(x)+a_1(x)\tau_1'(x)+a_0(x)\tau_1(x)\right\}\right]+\delta(x)\tau_1(x)\right)dx.$$

После преобразований, получим:

$$\bar{J}=-\frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{2}\left(\tau_1'^2(1)-\tau_1'^2(0)\right)+\frac{\bar{\alpha}}{2}\int_0^1\left(\bar{\beta}\left(2a_0(x)-a_1'(x)\right)+2\delta(x)\right)\tau_1^2dx. \qquad (21)$$

Из условия (19), заключаем, что

$$\bar{\beta}\left(2a_0(x)-a_1'(x)\right)+2\delta(x)\le 0,$$

и, следовательно,

$$\bar{J}=\int_0^1 \tau_2(x)\upsilon_2(x)dx\le 0. \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), заключаем, что $\bar{J}\equiv 0$. Тогда

$$\tau_2(x)=\upsilon_2(x)=\tau_1(x)=\upsilon_1(x)\equiv 0.$$

По схеме, предложенной в работе [2], доказывается, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\bar{\Omega}$.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Интегрируем (16) три раза от 0 до x, получим:

$$\tau_1(x)-\tau_1(0)-\tau_1'(0)x+\int_0^x (x-s)\overline{a}_1(x)\tau_1(x)ds+\int_0^x \frac{(x-s)^2}{2}\left[\overline{a}_0(s)-\overline{a}_1'(s)\right]\tau_1(s)ds=$$

$$=\left(\tau_1''(0)+\overline{a}_1(0)\tau_1(0)\right)\frac{x^2}{2}+\int_0^x \frac{(x-s)^2}{2}\overline{\alpha}_2(s)ds.$$

Откуда $$\tau_1(x)+\int_0^x\left[(x-s)\overline{a}_1(x)+\frac{(x-s)^2}{2}\left(\overline{a}_0(s)-\overline{a}_1'(s)\right)\right]\tau_1(x)ds=$$

$$=\tau_1(0)+\tau_1'(0)x+\left(\tau_1''(0)+\overline{a}_1(0)\tau_1(0)\right)\frac{x^2}{2}+\int_0^x \frac{(x-s)^2}{2}\overline{\alpha}_2(s)ds.$$

Обозначая $K(x,s)=-\left[(x-s)\overline{a}_1(x)+\frac{(x-s)^2}{2}\left(\overline{a}_0(s)-\overline{a}_1'(s)\right)\right]$,

$$F(x)=\tau_1(0)+\tau_1'(0)x+\int_0^x \frac{(x-s)^2}{2}\overline{\alpha}_2(s)ds, \quad C=\tau_1''(0)+\overline{a}_1(0)\tau_1(0),$$

перепишем последнее выражение в виде:

$$\tau_1(x)-\int_0^x K(x,s)\tau_1(x)ds=C\frac{x^2}{2}+F(x). \tag{22}$$

Если обозначить через

$$\rho_1(x)=C\frac{x^2}{2}+F(x),$$

будем иметь:

$$\tau_1(x)-\int_0^x K(x,s)\tau_1(x)ds=\rho_1(x). \tag{22'}$$

Обращая (22’) через резольвенту $R(x,s)$ ядра $K(x,s)$, получим:

$$\tau_1(x)=\rho_1(x)+\int_0^x R(x,t)\rho_1(t)dt, \tag{23}$$

или $\tau_1(x)=C\frac{x^2}{2}+F(x)+\int_0^x R(x,t)\left[C\frac{t^2}{2}+F(t)\right]dt$.

Откуда $\tau_1(x)=C\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^x R(x,t)t^2dt\right]+\rho_2(x)$,

где $\rho_2(x)=F(x)+\int_0^x R(x,t)F(t)dt$.

Продифференцировав (23), получим:

$$\tau_1'(x)=\rho_1'(x)+R(x,x)\rho_1(x)+\int_0^x R_x'(x,t)\rho_1(t)dt$$

или $\tau_1'(x)=C\left[x+\frac{1}{2}x^2R(x,x)+\frac{1}{2}\int_0^x R_x'(x,t)t^2dt\right]+\rho_2(x)$,

где $\rho_2(x)=F'(x)+R(x,x)F(x)+\int_0^x R_x'(x,t)F(t)dt$.

Для определения C воспользуемся третьим условием (17). Будем иметь:

$$\alpha_1(0)\left[C\left(x_0+\frac{1}{2}x_0^2R(x_0,x_0)+\frac{1}{2}\int_0^{x_0}R_x'(x_0,t)t^2dt\right)+\rho_1(x_0)\right]+$$

$$+\beta_1(0)\left[C\left(\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{2}\int_0^{x_0}R_x(x_0,t)t^2dt\right)+\rho_1(x_0)\right]-$$

$$-\alpha_2(0)\left[C\left(1+\frac{1}{2}R(1,1)+\frac{1}{2}\int_0^1 R_x'(1,t)t^2dt\right)+\rho_1(1)\right]-$$

$$-\beta_2(0)\left[C\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 R_x(1,t)t^2dt\right)+\rho_1(1)\right]=\delta(0).$$

Если обозначить через

$$q=\rho_1(x_0)[\alpha_1(0)+\beta_1(0)]-\rho_1(1)[\alpha_2(0)+\beta_2(0)],$$

$$\overline{\Delta}=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)\left(2x_0+x_0^2R(x_0,x_0)+\int_0^{x_0}R_x'(x_0,t)t^2dt\right)+\right.$$

$$+\beta_1(0)\left(x_0^2+\int_0^{x_0}R_x(x_0,t)t^2dt\right)-\alpha_2(0)\left(2+R(1,1)+\int_0^1 R_x'(1,t)t^2dt\right)-$$

$$\left.-\beta_2(0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 R_x(1,t)t^2dt\right)\right],$$

то при условии, что $\Delta\neq 0$, найдем C:

$$C=\frac{\delta(0)-q}{\Delta}$$

и, следовательно, для определения неизвестного $\tau_1''(0)$ будем иметь следующую формулу:

$$\tau_1''(0)=\frac{\delta(0)-q}{\Delta}-a_1(0)\varphi_1(0).$$

После определения функций $\upsilon_1(x)$, $\tau_2(x)$, $\upsilon_2(x)$ из формул (15), (12), (13) решение задачи 1 в области Ω_2 находится по формуле (9), а в области Ω_1 приходим к следующей задаче: (1), (2), $u_1(x,+0)=\tau_1(x)$, существование решения которой доказывается с помощью преобразований Лапласа.

Список литературы

1. Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференциальные уравнения. 1977. — Т. 13. — № 1. — С. 56.
2. Елеев В.А., Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением для уравнений третьего порядка. Известия КБНЦ РАН, 1998, № 1.
3. Елеев В.А. О краевых задачах для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 4. — С. 627.
4. Елеев В.А., Лесев В.Н. О двух краевых задачах для смешанных уравнений с перпендикулярными линиями изменения типа // Владикавказский математический журнал. — 2001. — Т. 3. — № 4. — С. 9–22.
5. Лесев В.Н. Нелокальные краевые задачи для смешанных уравнений с негладкими линиями изменения типа // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Нальчик, 2003.
6. Лесев В.Н., Бжеумихова О.И. Задачи для смешанных уравнений и уравнений с отклоняющимся аргументом. Существование и единственность решений. – Saarbrücken (Germany): Palmarium Academic Publishing. 2012. – 147 p.
7. Лесев В.Н., Желдашева А.О. Неклассическая краевая задача для смешанного уравнения второго порядка с интегральными условиями сопряжения // Известия Смоленского государственного университета. — 2013. — № 3 (23). — С. 379–386.
8. Лесев В.Н. Задача Бицадзе-Самарского для уравнения эллиптико-гиперболического типа с перпендикулярными линиями вырождения // Тезисы докладов Северо-Кавказской региональной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспектива-98». – Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 1998. – С. 33–35.
9. Лесев В.Н. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с нелокальными условиями на гиперболической части границы и негладкими условиями сопряжения на линиях изменения типа // Материалы Северо-Кавказской региональной научной

конференции молодых ученых, аспирантов и студентов. «Перспектива-2001». – Т. II – Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2001. – С. 181–185.

10. Желдашева А.О. Задача со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа // Московское научное обозрение. — 2011. — № 9. — С. 07–08.

11. Жабоев Ж.Ж. Об одной нелокальной внутренне-краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Материалы третьей Международной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения». – Махачкала: ДГУ, 2007.

12. Жабоев Ж.Ж. Нелокальная задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа 3-го порядка с кратными характеристиками // Материалы Российско-Азербайджанского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Эльбрус, 2008.

13. Zhaboev Z.Z., Bekulova I.Z., Lesev V.N. Non-local boundary-value problem for the third order equation of mixed type // Чотирнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – С. 39–40.

Рецензенты:

Шхануков-Лафишев М. Х., д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН «Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН», г. Нальчик;

Журтов А.Х., д.ф.-м.н., профессор кафедры ГиВА Кабардино-Балкарского государственного университета, г. Нальчик.