

УДК 519.6:621.313.333.045.53

АППРОКСИМАЦИЯ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЕВЫХ ТРАНЗИСТОРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Воржев В.Б., Балдин О.В., Рогов И.Е.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия (344010, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), e-mail: caroling@mail.ru

Уровень развития вычислительных средств позволяет сменить устоявшийся в технических науках подход к аппроксимации практически важных характеристик с точки зрения их наглядности и физической (технической) объяснимости. Все эти несомненные достоинства, как правило, ведут к ухудшению точности отображения реальных кривых и, как следствие, могут быть полезны лишь для приближенных (качественных) расчетов или для точных расчетов на каком-то ограниченном интервале. В настоящее время такой подход является устаревшим, поскольку современные ПК позволяют (при наличии испытанных алгоритмов) достаточно быстро аппроксимировать нужную зависимость гладкой и непрерывной кривой с необходимой для проводимых расчетов точностью. Такие способы аппроксимации могли бы существенно упростить аналитические расчеты, позволив применить в них известные методы математического анализа (интегрирование, дифференцирование, решение задач оптимизации и т.д.). Этот подход применен в настоящей статье для аппроксимации вольт-амперных характеристики полевых транзисторов.

Ключевые слова: вольт-амперные характеристики, полевые транзисторы, экспоненциальная зависимость, математическая регрессия, крутизна характеристики.

APPROXIMATION OF CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTICS FIELD-EFFECT TRANSISTORS EXPONENTIAL CURVE WITH POLYNOMIAL INDICATORS

Vorzhev V.B., Baldin O.V., Rogov I.E.

DonState Technical University, Rostov on Don, Russia (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don Russia), e-mail: caroling@mail.ru

The level of development of modern computing tools allows you to change well-established in the technical sciences approach to the approximation of practically important characteristics in terms of their clarity and physical (technical) explained. All these undoubted merits, as a rule, lead to a deterioration in the accuracy of the display of real curves and, as a consequence, can be useful only for approximate (qualitative) calculations or for precise calculations at a certain limited range. Currently, this approach is obsolete because modern PCs allow (if tested algorithms) fast enough to approximate the desired relationship is smooth and continuous curve with the necessary precision of the calculations. Such methods of approximation would greatly simplify the analytical calculations, allowing them to use known methods of mathematical analysis (integration, differentiation, solving optimization problems, etc.). This approach is used in this article to approximate the current-voltage characteristics of the field-effect transistors.

Keywords: current-voltage characteristics, field effect transistors, the exponential dependence, mathematical regression, slope.

Как известно, в прикладных технических науках существуют численные и аналитические способы расчета, при этом каждый из них, имеет свои достоинства и недостатки. По этой причине в сложных расчетах применяются оба этих способа, в той мере, в какой каждый из них позволяет добиться желаемой точности при наименьших временных и аппаратных затратах.

В настоящее время широкое развитие средств ПК вывели на первое место численные методы расчета, однако аналитический подход остается востребованным благодаря красоте и наглядности представления результатов, возможности воспроизвести решение в любой точке

расчетного пространства, а также произвести различного рода математические операции (интегрирование, дифференцирование, и т. д.), получив в результате непрерывные, гладкие функции.

На сегодняшний день имеется большой выбор математических методов и приемов, позволяющих аппроксимировать непрерывные и гладкие кривые, а также научных работ, посвященных этой тематике [1 – 3]. В данной статье предложен метод экспоненциальных кривых с полиномиальными показателями, позволяющий расширить инструментарий инженеров-проектировщиков и научных работников в построении моделей технических процессов и устройств.

Постановка задачи

Как известно, многие вольт-амперные характеристики (полупроводникового диода, биполярного и полевых транзисторов) имеют вид экспоненты [4,5]. Однако при описании вышеперечисленных характеристик этим классом кривых, возникают определенные трудности и значительные расхождения с экспериментом на их отдельных участках.

Так, например, широко известное в электронике уравнение Шокли

$$i = i_s \left(e^{\frac{u}{\varphi_T}} - 1 \right) \quad (1.1),$$

(где i_s – ток насыщения, φ_T – температурный потенциал), не может описать с достаточной для инженерных расчетов точностью (хотя бы на участке напряжений $u \gg \varphi_T$) вольтамперную характеристику диода в силу ряда процессов, происходящих в объеме p-n перехода под действием внешнего напряжения [4, 5]. Значит, для описания подобных процессов нужно ввести некую модифицированную экспоненту, параметры которой позволили бы приблизить ее к экспериментальным кривым с необходимой точностью.

Такая кривая может быть описана функцией вида

$$y = e^{a_0 + \sum a_n x^n} \quad (1.2),$$

или, в более удобном для расчетов виде

$$y = A e^{\sum a_n x^n} \quad (1.3),$$

где $A = e^{a_0}$.

Следует отметить, что такое представление не лишено физического смысла, поскольку полином $\sum a_n x^n$ может (по крайней мере, теоретически) представлять собой разложение в ряд Маклорена некоей сложной функции. При этом (как показано ниже), добавление членов ряда позволяет увеличить точность аппроксимации (при условии, что экспериментальная кривая принадлежит к классу экспонент).

Очевидно, что функции (1.2) и (1.3) являются гладкими непрерывными и бесконечно дифференцируемыми, что позволяет осуществлять с ними все перечисленные выше математические операции.

Описание метода

Как известно, состояние полевых транзисторов в стационарном температурном режиме описывается стоковыми и сток-затворными характеристиками. На рис. 1 приведены такие характеристики для одного из типов транзисторов.

Видно, что сток-затворная характеристика имеет ярко выраженный экспоненциальный вид. Однако применение для её аппроксимации кривой вида (1.1) не оправдано, поскольку ведет к значительным расхождением с экспериментом (см. рис. 2).

Экспоненциальные зависимости для сток-затворных характеристик (рис. 2) были получены широко известными в прикладной математике уравнениями регрессии [6],

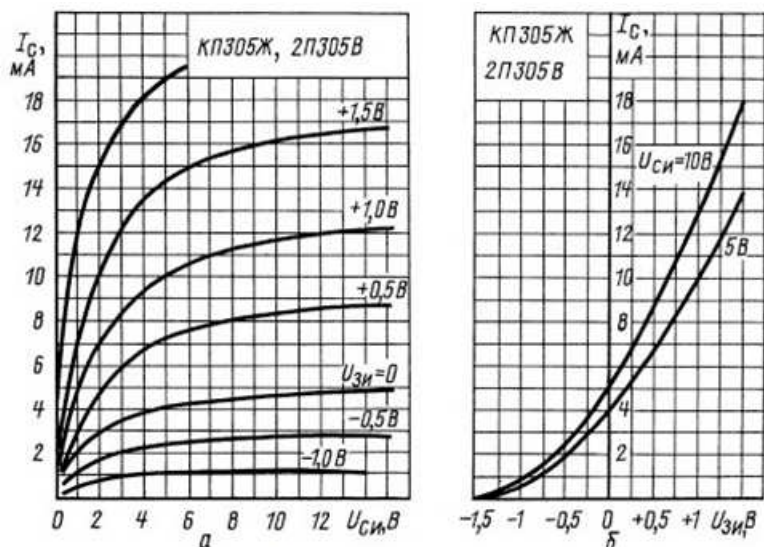


Рис. 1 Статические стоковые (а) и сток-затворные (б) характеристики МДП-транзистора со встроенным каналом

коэффициенты которых определяют отысканием экстремума некоего функционала

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n (y_{\text{экс } i} - y_{\text{рег } i}(a_1, a_2, \dots, a_n))^2 \quad (2.1).$$

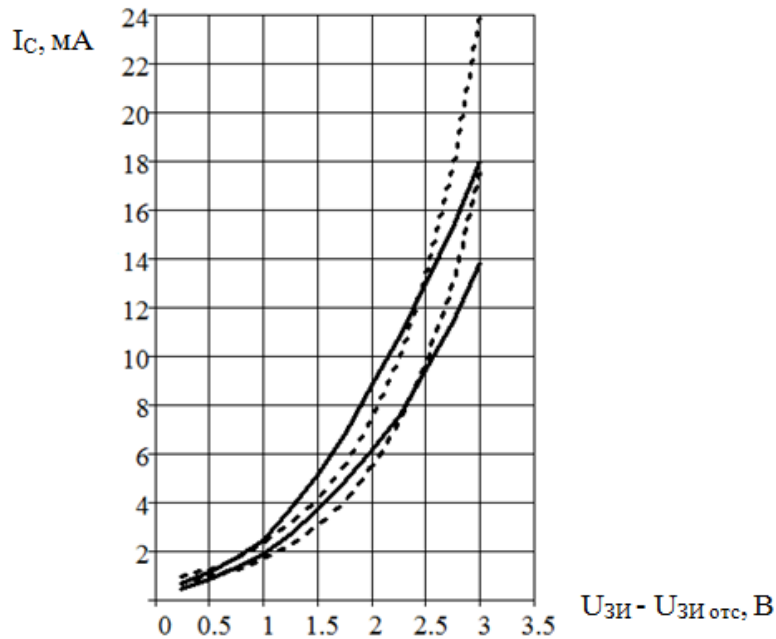


Рис. 2 Экспериментальные (сплошные линии) и аппроксимированные простой экспонентой (пунктирные линии) сток-затворные характеристики транзисторов КП305Ж и 2П305В; здесь и далее напряжения затвор-исток сдвинуты вправо на величину $U_{зиотс} = -1,5 \text{ В}$

Вычислив частные производные, получим следующую систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^n \left[(y_{\text{экс } i} - y_{\text{регр } i}(a_1, a_2, \dots, a_n)) \cdot \left(-\frac{\partial y_{\text{регр } i}}{\partial a_k} \right) \right] \right\} = 0 \quad (2.2).$$

В случае с экспоненциальной кривой $y_{\text{регр } i} = Ae^{Bx_i}$, удобнее работать не с самим вектором $y_{\text{экс } i}$, а с его логарифмом, что значительно упрощает вычисления, поскольку

$$\ln(y_{\text{регр } i}) = \ln A + Bx_i \quad (2.3),$$

что приводит к линейному уравнению регрессии.

Применим для аппроксимации экспоненту с показателем в виде квадратичного полинома:

$$y_{\text{регр } i} = e^{a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2} \quad (2.4),$$

где $y_{\text{регр } i}$ – аппроксимированные значения тока стока.

Тогда, согласно (2.3), получим:

$$\ln(y_{\text{регр } i}) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \quad (2.5).$$

При этом система уравнений (2.2) примет вид:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n \ln(y_{\text{перп } i}) \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n [\ln(y_{\text{перп } i}) \cdot x_i] \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n [\ln(y_{\text{перп } i}) \cdot x_i^2] \end{pmatrix} \quad (2.6).$$

Полученные таким образом кривые представлены на рис. 3, в сравнении с экспериментальными зависимостями, показывая лучшую точность их воспроизведения.

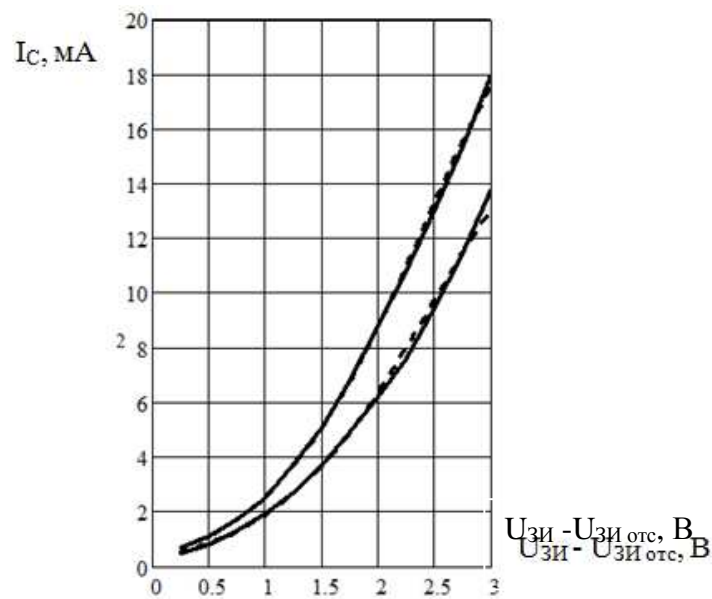


Рис. 3 Экспериментальные (сплошные линии) и аппроксимированные экспонентами с квадратичным показателем (пунктирные линии) сток-затворные характеристики транзисторов КП305Ж и 2П305В

Однако при высоких напряжениях $U_{зи}$ наблюдается некоторое расхождение в производной аппроксимированной функции с экспериментальной, что может привести к неточностям при вычислении крутизны характеристики $S = dI_c/dU_{зи}$. Повысим степень полинома до 3-х, при этом получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} n & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n \ln(y_{\text{перп } i}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^6 & \sum_{i=1}^n [\ln(y_{\text{перп } i}) \cdot x_i^3] \end{pmatrix} \quad (2.7).$$

Результаты такой аппроксимации представлены на рис. 4; они показывают, что с ростом степени полинома кривые аппроксимации сходятся к форме экспериментальных кривых.

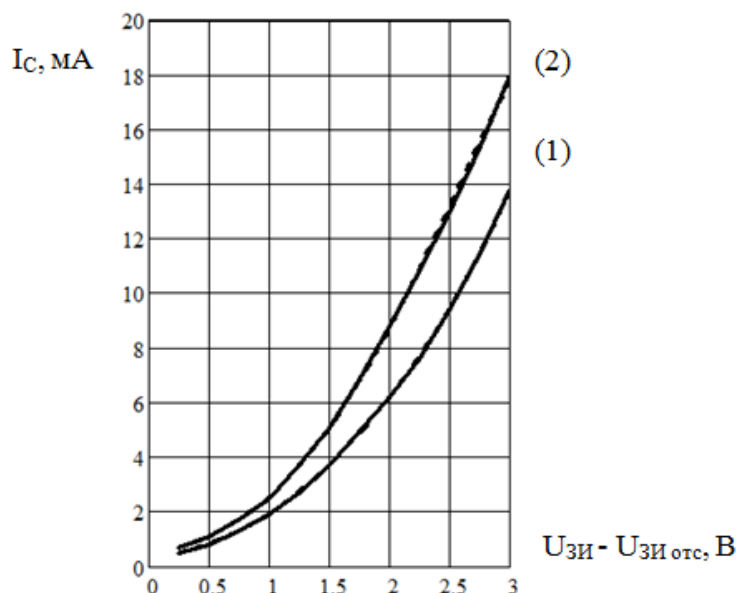


Рис. 4 Экспериментальные (сплошные линии) и аппроксимированные экспонентами с кубическим показателем (пунктирные линии) сток-затворные характеристики транзисторов КП305Ж и 2П305В при $U_{CU} = 5$ В (1) и $U_{CU} = 10$ В (2)

Близкая к эксперименту форма кривых показывает нецелесообразность дальнейшего повышения степени полинома в показателе экспоненты, поэтому окончательно искомые кривые выражаются следующими аналитическими формулами:

$$I_{Ck} = I_{C0k} \cdot e^{a_{1k}\Delta U_{ZH} + a_{2k}\Delta U_{ZH}^2 + a_{3k}\Delta U_{ZH}^3}, \quad k = 1, 2 \quad (2.8),$$

где $I_{C0k} = e^{a_{0k}}$, $\Delta U_{ZH} = U_{ZH} - U_{ZH\text{отс}}$.

Для исследованных сток-затворных характеристик ниже приведены рассчитанные коэффициенты I_{C0k} (в виде вектора I_{C0}) и $a_{1k} \dots a_{3k}$ (в виде матрицы A).

$$I_{C0} = (0,413; 0,279); A = \begin{pmatrix} 2,138 & 2,425 \\ -0,332 & -0,563 \\ 0,012 & 0,063 \end{pmatrix} \quad (2.9).$$

Замечание. Введение новой переменной ΔU_{ZH} обусловлено тем, что функция логарифма не существует при отрицательных аргументах. Более того, как показали расчеты, приближение величины ΔU_{ZH} к нулю ведет к значительным расхождениям кривых аппроксимации с экспериментальными характеристиками, что можно считать техническим недостатком данного метода.

Проделаем аналогичные вычисления для стоковых характеристик (рис. 1). Как показывают расчеты, хорошая точность аппроксимации для них также получается при кубической степени полинома в показателе экспоненты. Но теперь в виде функции должна быть взята величина напряжения сток-исток U_{CI} , а ток стока – аргументом. Несомненно, такое представление создает определенные неудобства, поскольку вольтамперные

характеристики это зависимости типа $I(U)$, но это неудобство имеет технический, а не принципиальный характер, поскольку, с точки зрения математического анализа, представления функции в виде $y(x)$ и $x(y)$ равноправны.

Таким образом, кривые аппроксимации для стоковых характеристик имеют следующий вид:

$$U_{сиk} = U_{сиок} \cdot e^{b_{1k}I_c + b_{2k}I_c^2 + b_{3k}I_c^3}, \quad k = 1 \dots 4 \quad (2.10),$$

где $U_{сиок} = e^{b_{0k}}$.

Результаты такой аппроксимации приведены на рис. 5, который показывает их хорошее совпадение с экспериментальными кривыми, приведенными на рис. 1.

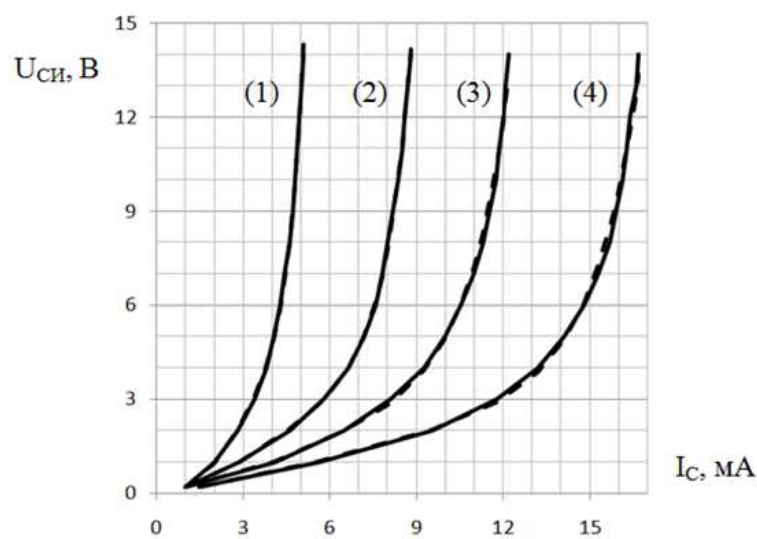


Рис. 5 Экспериментальные (сплошные линии) и аппроксимированные (пунктирные линии) экспонентами с кубическим показателем стоковые характеристики транзисторов КП305Ж и 2П305В при $U_{зи} = 0$ В (1), $U_{зи} = +0,5$ В (2), $U_{зи} = +1$ В (3), $U_{зи} = +1,5$ В (4)

Для исследованных стоковых характеристик ниже приведены рассчитанные коэффициенты $U_{сиок}$ (в виде вектора $U_{со}$) и $b_{1k} \dots b_{3k}$ (в виде матрицы B).

$$U_{со} = (0,014; 0,05; 0,086; 0,073); B = \begin{pmatrix} 3,432 & 1,627 & 0,934 & 0,762 \\ -0,807 & -0,25 & -0,099 & -0,065 \\ 0,079 & 0,0160 & 0,004640 & 0,00228 \end{pmatrix} \quad (2.11).$$

3. Результаты и выводы

Все изложенное дает основание считать данный метод применимым для практических расчетов в области электроники и схемотехники по следующим причинам:

1. Как было доказано расчетами, стоящий в степени полином дает возможность добиваться нужной точности в отображении экспериментальных кривых путем увеличения его степени.

2. Метод не является трудоемким, поскольку базируется на широко известном методе наименьших квадратов и общих принципах отыскания уравнений регрессии.

3. Представленные кривые являются непрерывными и гладкими, что позволяет использовать не только сами кривые, но и их производные.

В самом деле, для производной $dI_C/d(\Delta U_{3И})$ получим:

$$\frac{dI_{Ck}}{d(\Delta U_{3И})} = (a_{1k} + 2a_{2k}\Delta U_{3И} + 3a_{3k}\Delta U_{3И}^2) \cdot I_{C0k}, \quad k = 1, 2 \quad (2.12)$$

которая, как известно, является крутизной характеристики S .

Производная $dU_{Сик}/dI_C$ также рассчитывается в соответствии с правилами математического анализа. Из (2.10) получим:

$$\frac{dU_{Сик}}{dI_C} = (b_{1k} + 2b_{2k}I_C + 3b_{3k}I_C^2)U_{Сик}, \quad k = 1 \dots 4.$$

Как известно из электроники, данная производная является выходным сопротивлением полевого транзистора для переменного сигнала.

Недостатки метода уже упоминались выше. Это трудность описания кривых в области нуля по той переменной, к которой должна быть применена операция логарифмирования, а также некоторая громоздкость аналитической формулы, по сравнению с формулами и зависимостями, описывающими подобные характеристики на кусочных интервалах.

Список литературы

1. Гидаспов В.Ю., Иванов И.Э., Ревизников И.Е. и др. Численные методы. Сборник задач: - М.: Дрофа, 2007. – 144 с.: ил.
2. Воржев В.Б., Калиенко И.В. Применение математической регрессии для определения параметров трехфазного асинхронного двигателя // Вестник ДГТУ. - 2013. - № 5/6 (74).
3. Калиенко И.В. Аппроксимация вольтамперных характеристик полевых транзисторов на основе кубических сглаживающих сплайнов // Измерительная техника. Май, 2001. с. 60-63.
4. Лачин В.И., Савелов Н.С. Электроника: учеб. пособие. – Изд. 7-е. – Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 703 с.
5. Джонс М.Х. Электроника – практический курс. Москва: Постмаркет, 1999. – 528 с.
6. Гмурман И.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие. – 12-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2006. – 479 с.: ил.

Рецензенты:

Лаврентьев А.А., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой электротехники и электроники ДГТУ, г. Ростов-на-Дону;

Звезда М.Ю., д.ф.-м.н., доцент, заведующая кафедрой радиэлектроники ДГТУ, г. Ростов-на-Дону.