**УДК 519.6**

# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО РОДА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

**Абрегов М.Х.[1], Нахушева Ф.М.[1], Бечелова А.Р.[1]**

[1] ФГБОУ ВПО *«Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

**Нагруженные дифференциальные уравнения возникают при моделировании различных физических и биологических процессов, в частности, при изучении движения почвенной влаги, задачах теплопроводности. При решении краевых задач для нагруженного оператора Штурма-Лиувилля появляется необходимость повышения порядка точности применяемого конечно-разностного метода. Данная работа посвящена численному методу повышенного порядка точности решения краевой задачи третьего рода для нагруженного оператора Штурма-Лиувилля. В работе приведены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. В классе достаточно гладких коэффициентов доказана сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в равномерной метрике с четвертым порядком точности по шагу сетки. Основным методом исследования задачи является принцип максимума. С помощью принципа максимума получены априорные оценки погрешности приближенного решения в равномерной метрике, откуда следует её сходимость к точному решению задачи.**

Ключевые слова: третья краевая задача для нагруженного оператора Штурма-Лиувилля; однозначная разрешимость; численный метод решения повышенного порядка; равномерная оценка.

# NUMERICAL METHODS OF SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE THIRD KIND OF HIGHER ORDER ACCURACY FOR LOADED STURM-LIOUVILLE

**Abregov M.H.[1], Nakhusheva F.M., Bechelova A.R.[1]**

[1] *"Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov "Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

**Loaded differential equations arise when modeling a variety of physical and biological processes, in particular in the study of movement of soil moisture, heat transfer problems. In solving boundary value problems for a loaded Sturm-Liouville appears the need to improve order accuracy used finite-difference method. This work is devoted to the numerical method of high order boundary problem solution of the third kind for a loaded Sturm-Liouville operator. The paper presents necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem. In the class of sufficiently smooth coefficients proved convergence of the solution of the difference problem to the solution of the differential problem in the uniform metric to the fourth order of accuracy in pitch grid. The basic method of investigation of the problem is the principle of maximum. With the help of the maximum principle, a priori estimates of approximate solutions in the uniform metric, which implies its convergence to the exact solution of the problem.**

Keywords: third boundary value problem for a loaded Sturm-Liouville operator; a unique solution; numerical method for solving high-order; uniform estimate.

В работе рассматривается численный метод решения краевой задачи

$$u'' - g(x)u + m(x)u(\xi) = -f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u'(0) = b_1 u(0), \tag{2}$$

$$-u'(1) = b_2 u(1), \tag{3}$$

где $\xi$ - фиксированная точка интервала $(0,1)$, $b_1$ и $b_2$ - положительные числа. Коэффициент $m(x)$ в уравнении (1) предполагается отличным от нуля хотя бы в одной точке отрезка $[0,1]$.

Пусть $p(x)$ и $\upsilon(x)$ - решения дифференциальных задач

$$p'' - g(x)p = -f(x), \qquad p'(0) = b_1 p(0), \qquad -p'(1) = b_2 p(0), \tag{4}$$

$$\upsilon'' - g(x)\upsilon = -m(x), \qquad \upsilon'(0) = b_1 \upsilon(0), \qquad -\upsilon'(1) = b_2 \upsilon(1), \tag{5}$$

соответственно. Приведём формулировки теорем, в которых даются необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)-(3).

***Теорема 1.*** *Пусть* $f(x), g(x), m(x) \in C[0,1]$, $0 < G_0 \le g(x) \le G_1$ *и выполнено условие*

$$1 - \upsilon(\xi) \ne 0. \tag{6}$$

*Тогда задача (1)-(3) однозначно разрешима в классе* $C^{(2)}[0,1]$ *, и её решение представимо в виде*

$$u(x) = p(x) + \frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)} \cdot \upsilon(x). \tag{7}$$

***Теорема 2.*** *Пусть* $f(x), g(x), m(x) \in C[0,1]$, $0 < G_0 \le g(x) \le G_1$ *и функция* $m(x)$ *такова, что для всех* $x \in [0,1]$ *выполнено условие*

$$0 \le m(x) < g(x). \tag{8}$$

*Тогда решение задачи (1)-(3) существует, единственно и принадлежит классу* $C^{(2)}[0,1]$.

Эти теоремы доказаны в работах [1], [2]. В дальнейшем будем считать, что выполнены условия В: $f(x)$, $g(x)$, $m(x) \in C^{(4)}[0,1]$, $0 < G_0 \le g(x) \le G_1$.

Имеет место

***Теорема 3.*** *Если* $f(x), g(x), m(x)$ *удовлетворяют условию В и выполнено (8), то решение задачи (1)-(3) принадлежит классу* $C^{(6)}[0,1]$.

Доказательство этой теоремы следует из однозначной разрешимости задач (4) и (5) в классе $C^{(6)}[0,1]$ при выполнении условий В, и представления решения в виде (7).

Введём на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку $\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, ..., N; \quad hN = 1\}$. Шаг $h$ сетки выберем меньше половины меньшего из отрезков $[0,\xi]$, $[\xi,1]$. Номер $k$ выберем из условия $kh \le \xi < (k+1)h$. Используем для сеточной функции $y$, определённой на $\omega_h$, обозначение [5]: $y_{\bar{x}x} = \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$. Дифференциальную задачу (4) аппроксимируем конечно-разностной схемой

$$P_{\bar{x}x} - gP - \frac{h^2}{12}(gP)_{\bar{x}x} = -f - \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x}, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{9}$$

$$\frac{P_1 - P_0}{h} = \left(b_1\left(1 + \frac{h^2}{6} \cdot \frac{g_0 + g_1}{2}\right) + \frac{h}{6}\left(\left(1 + \frac{h^2}{4} g_0\right) g_0 + 2 g_{\frac{1}{2}}\right)\right) P_0 - \frac{h}{6}\left(\left(1 + \frac{h^2}{4} g_0\right) f_0 + 2 f_{\frac{1}{2}}\right),$$

$$-\frac{P_N - P_{N-1}}{h} =$$

$$= \left( b_1\left(1+\frac{h^2}{6}\cdot\frac{g_N + g_{N-1}}{2}\right) + \frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}g_N\right)g_N + 2g_{N-\frac{1}{2}}\right)\right)P_N - \frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}g_N\right)f_N + 2f_{N-\frac{1}{2}}\right),$$

где $g_i = g(x_i),\ f_i = f(x_i),\ g_{\frac{1}{2}} = g\left(\frac{h}{2}\right),\ f_{\frac{1}{2}} = f\left(\frac{h}{2}\right),\ g_{N-\frac{1}{2}} = g\left(1-\frac{h}{2}\right),\ f_{N-\frac{1}{2}} = f\left(1-\frac{h}{2}\right)$ ,

а дифференциальную задачу (5) - конечно-разностной схемой

$$V_{\bar{x}x} - gV - \frac{h^2}{12}(gV)_{\bar{x}x} = -m - \frac{h^2}{12}m_{\bar{x}x}, \qquad i=\overline{1, N-1}, \tag{10}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{h} = \left( b_1\left(1+\frac{h^2}{6}\cdot\frac{g_0 + g_1}{2}\right) + \frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}g_0\right)g_0 + 2g_{\frac{1}{2}}\right)\right)V_0 - \frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}g_0\right)m_0 + 2m_{\frac{1}{2}}\right),$$

$$-\frac{V_N - V_{N-1}}{h} = \left( b_2\left(1+\frac{h^2}{6}\cdot\frac{g_N + g_{N-1}}{2}\right) + \frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}g_N\right)g_N + 2g_{N-\frac{1}{2}}\right)\right)V_N -$$

$$-\frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}g_N\right)m_N + 2m_{N-\frac{1}{2}}\right),$$

где $m_i = m(x_i),\quad m_{\frac{1}{2}} = m\left(\frac{h}{2}\right),\quad m_{N-\frac{1}{2}} = m\left(1-\frac{h}{2}\right).$

Конечно-разностные схемы (9) и (10) аппроксимируют задачи (4) и (5) соответственно, с точностью $O(h^4)$, что не трудно показать с помощью разложений по формуле Тейлора.

Пусть

$$L_3(x;y) = L_3^0(x)y_{k-1} + L_3^1(x)y_k + L_3^2(x)y_{k+1} + L_3^3(x)y_{k+2}, \tag{11}$$

полином Лагранжа третьей степени, проведённый через точки $(x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$, $(x_{k+2}, y_{k+2})$. Коэффициенты Лагранжа вычисляются по формулам:

$$L_3^0(x) = -\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})}{6h^3}, \quad L_3^1(x) = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})}{2h^3},$$

$$L_3^2(x) = -\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+2})}{2h^3}, \quad L_3^3(x) = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1})}{6h^3}. \tag{12}$$

Введём обозначение $l_k V = L_3(\xi;V)$ и покажем, что $l_k V$ аппроксимирует значение $\upsilon(\xi)$ с точностью $O(h^4)$. В силу равенств $V_i = \upsilon_i + O(h^4),\ i \in \overline{0, \mathrm{N}-1}$, и ограниченности коэффициентов Лагранжа, $L_3(x;\upsilon) - L_3(x;V) = O(h^4)$. Поскольку полином $L_3(x;\upsilon)$ аппроксимирует функцию $\upsilon(x)$ на отрезке $x_{k-1}, x_{k+2}$ с точностью $O(h^4)$, что следует из известной оценки погрешности полинома Лагранжа $[5]$, то найдётся положительная постоянная $M_{V,\xi}$, не зависящая от $h$, что

$$\left|\upsilon(\xi)-l_k V\right| \le M_{V,\xi} h^4 . \tag{13}$$

Аналогично, $p(\xi)$ аппроксимируются величиной $l_k P = L_3(\xi;P)$ с точностью $O\left(h^4\right)$, следовательно, найдётся постоянная $M_{P,\xi}$, что

$$\left|p(\xi)-l_k P\right| \le M_{P,\xi} h^4 . \tag{14}$$

В качестве приближённого решения задачи (1)-(3) выберем сеточную функцию $y$:

$$y_i = P_i + \frac{l_s P}{1-l_s V}\cdot V_i, \quad i=\overline{0,N} . \tag{15}$$

Имеет место

***Теорема 4.*** *Пусть выполнены условия B и (8). Тогда сеточная функция $y_i$, определённая по формуле (15), сходится при $h \to 0$ к решению $u(x)$ задачи (1)-(3) со скоростью $O\left(h^4\right)$ в равномерной метрике.*

***Доказательство.*** Используя представление (7) решения задачи (1)-(3), получим оценку погрешности $u-y$ в равномерной метрике:

$$\|u-y\|_{C(\omega_h)} \le \|p-P\|_{C(\omega_h)} + \frac{1}{\left|1-\upsilon(\xi)\right|}\cdot\|\upsilon-V\|_{C(\omega_h)}\cdot\|p\|_C + \frac{1}{\left|1-l_s V\right|}\cdot\left|p(\xi)-l_s P\right|\cdot\|V\|_{C(\omega_h)} +$$

$$+\frac{\left|\upsilon(\xi)-l_s V\right|}{\left|1-l_s V\right|\cdot\left|1-\upsilon(\xi)\right|}\cdot\|p\|_C\cdot\|V\|_{C(\omega_h)} . \tag{16}$$

Оценим слагаемые в правой части (16). Сначала оценим $\|V\|_{C(\omega_h)}$. Отметим, что в силу принципа максимума разностной краевой задачи третьего рода $[6]$, решения задачи (10) положительны. Перепишем уравнение (10) в виде

$$\left(\frac{1}{h^2}-\frac{g_{i-1}}{12}\right)\left(V_{i+1}-V_i\right)-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{g_{i+1}}{12}\right)\left(V_i-V_{i-1}\right)-\left(g_i+\frac{h^2}{12}g_{\bar{x}x,i}\right)\cdot V_i = -\left(m_i+\frac{h^2}{12}m_{\bar{x}x,i}\right). \tag{17}$$

Пусть положительный максимум $V_{\max}$ функции $V$ достигается в точке $x_i$, т.е. $V_{\max}=V_i$, где $1\le i\le N-1$. Тогда, в силу $V_i \ge V_{i+1}$, $V_i \ge V_{i-1}$, из (17) получаем оценку

$$V_i \le \left(m_i+\frac{h^2}{12}m_{\bar{x}x,i}\right)\Big/\left(g_i+\frac{h^2}{12}g_{\bar{x}x,i}\right) \le \frac{\|m\|_C}{G_0} .$$

Если $V_{\max}=V_0$, то из левого краевого условия (10) следует оценка:

$$V_{\max}=V_0 \le \left(\left(1+\frac{h^2}{4}g_0\right)m+2m_{\frac{1}{2}}\right)\Big/\left(\left(1+\frac{h^2}{4}g_0\right)g_0+2g_{\frac{1}{2}}\right) \le \frac{\|m\|_C}{G_0} .$$

Если $V_{\max} = V_N$ , то из правого краевого условия (10) следует оценка:

$$V_{\max} = V_N \le \left( \left( 1 + \frac{h^2}{4} g_N \right) m_N + 2m_{N-\frac{1}{2}} \right) \Big/ \left( \left( 1 + \frac{h^2}{4} g_N \right) g_N + 2g_{N-\frac{1}{2}} \right) \le \frac{\|m\|_C}{G_0}.$$

Таким образом, для решения задачи (10) имеет место оценка:

$$V_{\max} \le \frac{\|m\|_C}{G_0}. \tag{18}$$

С учётом аппроксимации порядка $O(h^4)$ разностной схемы (10) на решении задачи (4), найдётся положительная постоянная $M_{V,1}$, что

$$\|\upsilon - V\|_{C(\omega_h)} \le M_{V,1} h^4. \tag{19}$$

Также найдется положительная постоянная $M_{P,1}$,что

$$\|p - P\|_{C(\omega_h)} \le M_{P,1} h^4. \tag{20}$$

Введём обозначение $\Delta_m = g(x) - m(x)$. Если выполнено условие (8), то, как следует из принципа максимума третьей краевой задачи для оператора Штурма-Лиувилля [4], $\upsilon(x) > 0$, при этом имеет место оценка

$$1 - \upsilon(\xi) \ge \frac{\Delta_m}{G_1}. \tag{21}$$

Получим нижнюю оценку выражения $|1 - l_k V|$. Пусть $h_0$- шаг сетки, что $h_0^4 = \dfrac{\Delta_m}{2G \cdot M_{V,\xi}}$.

Тогда при $h \le h_0$, оценка (13) принимает вид $|\upsilon(\xi) - l_k V| \le \dfrac{\Delta_m}{2G_1}$, откуда следует:

$$1 - l_k V \ge 1 - \upsilon(\xi) - \frac{\Delta_m}{2G_1} \ge \frac{\Delta_m}{2G_1}. \tag{22}$$

Применяя оценки (13), (14), (18)-(22) из (16) получаем:

$$\|u - y\|_{C(\omega h)} = M_0 \left( 1 + \frac{1}{\Delta_m} \cdot \frac{G_1}{G_0} \|f\|_C \right) \left( 1 + \frac{2}{\Delta_m} \cdot \frac{G_1}{G_0} \|m\|_C \right) h^4. \tag{23}$$

Из оценки (23) следует утверждение теоремы 4.

## Список литературы

1. Абрегов М.Х., Бечелова А.Р. Вторая краевая задача для нагруженного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Известия КБНЦ РАН, №3(35), Нальчик, 2010 г.
2. Абрегов М.Х., Бечелова А.Р., Нахушева Ф.М. Численный метод решения краевой задачи второго рода для нагруженного оператора Штурма-Лиувилля. Современные проблемы науки и образования. – 2015. - № 1; URL: www.science-education.ru/121-18383.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1982 г.
4. Protter M.A.,Weinberger H.F. Maximum principles in differential equations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.- 1967 г.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983 г.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989 г.

**Рецензенты:**

Шхануков-Лафишев М.Х. д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик;
Ашабоков Б.А,, д.ф.-м.н., профессор, Высокогорный Геофизический Институт, г. Нальчик.