УДК 519.872.7

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА МНОГОКАНАЛЬНОЙ СМО С РОУТЕРОМ ПРИ ЭПИЗОДИЧЕСКИ НАБЛЮДАЕМОЙ ДЛИНЕ ОЧЕРЕДИ НА ПРИБОРАХ

Бутов А.А.[1], Галимов Л.А.[1]

[1]*ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет», Ульяновск, Россия (432700, г. Ульяновск, Набережная реки Свияги,1, корпус 1, ауд. 604), e-mail: lin8773@yandex.ru*

В настоящей работе рассматривается оптимальное управление интенсивностью входящего потока заявок многоканальной СМО с роутером при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах. Рассматриваются две модели СМО: эпизодический процесс длины очереди строится по наблюдениям в моменты остановки и аналогичная модель, но с введенным процессом телеграфного типа. Решение задачи сводится к нахождению экстремума функционала, зависящего от средней длины очереди на приборах, цены наблюдения и времени наблюдения. В статье представлена математическая модель многоканальной системы массового обслуживания в терминах точечных процессов, её алгоритмизация, числовой эксперимент и результирующий график функционала. В заключении приведены соответствующие выводы о выборе оптимальной стратегии управления входящим потоком при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах.

Ключевые слова: имитационное моделирование, многоканальная система массового обслуживания, оптимальное управление, эпизодические наблюдения.

OPTIMAL CONTROL OF ARRIVAL RATE IN THE MULTI-SERVER QUEUEING SYSTEMS WITH ROUTER AND OCCASIONALLY OBSERVED QUEUE LENGTH ON DEVICES

Butov A.A.[1], Galimov L.A.[1]

[1]*International Relations Department Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia (432700, Ulyanovsk, street Naberezhnaya reki Sviyagi,1, 604), e-mail: lin8773@yandex.ru*

The article deals with optimal control of arrival rate in the multi-server queueing systems with router and occasionally observed queue length on devices. Two processes of queue length are considered: episodic process of queue length built on observations at stopping time, and the similar model with the added telegraph process. A solution of the problem reduced to finding extreme point of a functional model that depends on average length queue, cost of observations and modeling time. Mathematical model of multi- server queueing systems in term of point processes, construction of algorithm, numerical experiments, resulting graph of system performance are presented in this article. In summary lessons learned about selection of the optimal control of arrival rate for a given occasionally observed queue length on servers.

Keyword: simulation modeling, multi-server queueing system, optimal control, occasionally observations

Модели и методы теории массового обслуживания находят широкие применения в задачах организации производства, при построении систем связи и вычислительных систем в военном деле, авиационной отрасли и т.п. Задачи оптимального управления, постоянно возникающие в этих областях, привели к формированию понятия управляемой системы массового обслуживания и постановке задач оптимального управления системами массового обслуживания [5]. Критерием оптимального управления СМО в зависимости от целей исследования могут служить ее различные характеристики: производительность системы, среднее количество требований в системе или среднее время ожидания, вероятности потерь, коэффициент загрузки системы или среднее время простоя приборов и т.п.[5].

Наряду с классическим представлением управляемых систем массового обслуживания [3,4], модели СМО могут быть описаны в терминах точечных процессов [2], при которых поведение СМО описывается некоторым случайным процессом, а наличие управляемых воздействий приводит к изменению его траекторий.

В настоящей работе рассматривается оптимальное управление интенсивностью входящего пуассоновского потока заявок многоканальной СМО с роутером при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах. Рассматриваются две модели СМО: в первой эпизодический процесс длины очереди строится по наблюдениям в моменты остановки $\tau_1, \tau_2,,, \tau_k$; вторая модель строится аналогично первой, но с введенным процессом телеграфного типа.

Задача нахождения оптимального управления интенсивностью входящего потока двух моделей СМО решается путем нахождения экстремума функционала, зависящего от средней длины очереди на приборах, цены наблюдения и времени моделирования. Решение задачи оптимального управления представлено методами имитационного стохастического моделирования, включающими формальное представление модели, её алгоритмизация, численное нахождение экстремума функционалов, сравнение результатов.

Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания с двумя обслуживающими устройствами с входящим пуассоновским потоком и моделью роутера (4.2) (детальное описание см. [1]). Введем процессы X_t^1, X_t^2. Значения данных процессов соответствуют значениям Q_t^1, Q_t^2 соответственно, в моменты остановок $\tau_1, \tau_2,,, \tau_k$, $k \in \mathrm{N}$, где $\tau_k = \inf(t : t > 0, \pi_t \geq k)$. Обозначим F_t^X как неубывающее непрерывное справа семейство σ- алгебр $F_t^X = \sigma\{Q_{\tau_0}, Q_{\tau_1} \cdot I(\tau_1 < t), Q_{\tau_2} \cdot I(\tau_2 < t), ..., (\pi_s, s \leq t\}$. Тогда процесс X_t^1 для первого обслуживающего устройства принимает вид:

$$X_t^1 = Q_0^1 + \int_0^t \left(Q_s^1 - X_{s\_}^1\right) d\pi_s \tag{1}$$

Соответственно, для второго обслуживающего устройства процесс записывается как

$$X_t^2 = Q_0^2 + \int_0^t \left(Q_s^2 - X_{s\_}^2\right) d\pi_s \tag{2}$$

Где $X_0^1 = Q_0^1, X_0^2 = Q_0^2$.

Процессы X_t^1, X_t^2 характеризуют значения очереди в моменты остановок, т.е. фактическое значение длины очереди на приборе определяется лишь после того, как заявка была распределена в соответствующую очередь в момент времени t. Задача заключается в нахождении оптимальной интенсивности наблюдений λ в модели с двумя обслуживающими устройствами и роутером.

Запишем функционал системы:

$$\Phi(A,\lambda,T) = A\cdot\lambda + \frac{1}{T}\int_0^T \left(X_s^1 + X_s^2\right)ds \tag{3}$$

Умножив правую часть на T, получим функцию Φ'

$$\Phi'(A,\lambda,T) = A\cdot\lambda\cdot T + \int_0^T \left(X_s^1 + X_s^2\right)ds \tag{3'}$$

Где $A > 0$ заданная константа – цена наблюдения, T - время моделирования.

Модель (1), (2) с функционалами (3), (3') можно интерпретировать следующим образом.

Предположим, что на i-ом обслуживающем устройстве определение длины очереди происходит только при отправке роутером на соответствующий i прибор. Тогда при $\lambda \to 0$ достигается наилучшая аппроксимация X_t^i по наблюдениям $Q_t^i, i = 1,2$.[7] Однако, при $\delta^1, \delta^2 - const,$ второе слагаемое уравнения (3) $\frac{1}{T}\int_0^T \left(Q_s^1 + Q_s^2\right)ds \to \infty$. В то же время, при $\lambda \to \infty$, $\frac{1}{T}\int_0^T \left(Q_s^1 + Q_s^2\right)ds \to 0$.

Таким образом, оптимизационная задача заключается в нахождении такого параметра λ системы, при котором значение функционала (3) было бы наименьшим.

$$\Phi(A,\lambda,T) = \min_{\lambda} \Phi(T,A) \tag{4}$$

Рассмотрим аналогичную модель СМО за исключением того, что в момент остановки (т.е. прихода заявки на распределительное устройство) у нас есть возможность определить значение очереди только на одном обслуживающем устройстве. Введем процесс телеграфного типа N_t^1, тогда значение процессов X_t^1, X_t^2 будет определено следующим образом:

$$\begin{cases} X_t^1 = N_t \cdot Q_t^1 + \left(1 - N_t\right)\cdot X_{t\_}^1 = N_t \cdot \int_0^t \left(Q_s^1 - X_{s\_}^1\right)d\pi_s + \left(1 - N_t\right)\cdot X_{t\_}^1 \\ X_t^2 = \left(1 - N_t\right)\cdot Q_t^2 + N_t \cdot X_{t\_}^2 = N_t \cdot \int_0^t \left(Q_s^2 - X_{s\_}^2\right)d\pi_s + \left(1 - N_t\right)\cdot X_{t\_}^2 \\ N_t = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} + \int_0^t \left(1 - N_{s\_}\right)d\pi_s - \int_0^t N_{s\_}\, d\pi_s \end{cases} \tag{5}$$

Эксперимент, результаты моделирования

Построим для моделей (2-3), (5) при фиксированном значении δ^1, δ^2 график функционала (3) в зависимости от λ с шагом h. Для каждой точки $\lambda, \lambda+h, \lambda+2\cdot h,..\lambda+n\cdot h$, где $n \in \mathrm{N}$ рассчитаем значение функционала Φ.

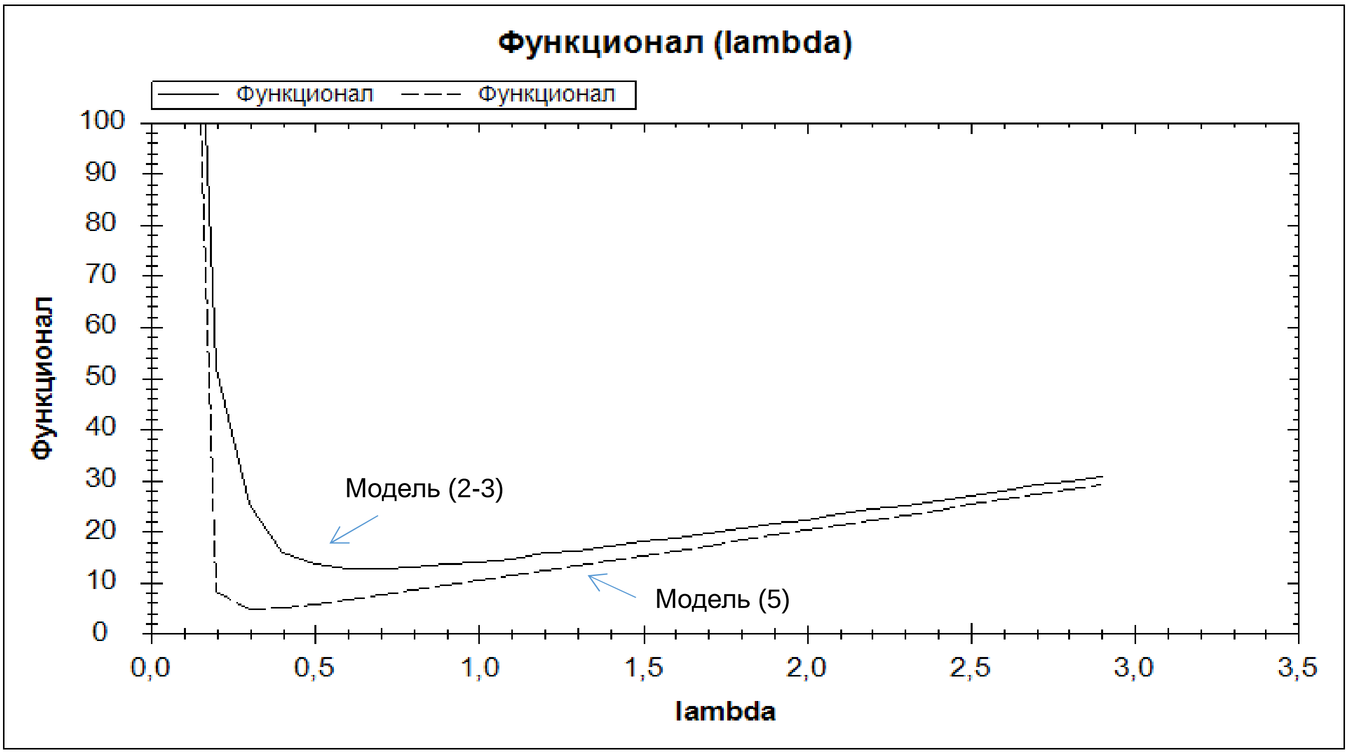

График $\Phi(A,\lambda,T)$, $\delta^1 = 0.3$, $\delta^2 = 0.4$, $h = 0.1$, $T = 1000$, $A = 10$, $N = 10$

Заключение

Целью настоящей работы являлось построение задачи и нахождение оптимального управления интенсивностью λ входящего потока многоканальной СМО с роутером при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах и сравнение экстремумов двух моделей (2-3) и (5). Численное решение функционала (3) для моделей (2-3), (5) продемонстрировано на рисунке. Согласно графику, при заданных параметрах $\delta^1 = 0.3, \delta^2 = 0.4$, $A = 10$ для модели (5) $\hat{\lambda} \in (0.3;0.4)$, для модели (2-3) $\hat{\lambda} \in (0.5;0.6)$, при которых значение $\Phi^1(A,\hat{\lambda},T) \to \min$, $\Phi^2(A,\hat{\lambda},T) \to \min$ соответственно. Модель (5) эффективнее модели (2-3), т.е. при $\forall \lambda, \delta^1, \delta^2, A, T$ выполнено $\Phi^2(A,\lambda,T) < \Phi^1(A,\lambda,T)$. Таким образом, представленная имитационная модель позволяет находить оптимальную интенсивность наблюдений λ в задаче распределения заявок роутером в системе из двух обслуживающих подсистем.

Список литературы

1. Бутов А.А., Галимов Л.А., Оптимальное управление распределением заявок в роутере с заданием соотношений интенсивностей в многоканальной СМО // Современные проблемы науки и образования. – 2014. - №6; URL: www.science-education.ru/120-16872 (дата обращения: 31.05.2015).
2. Бутов, А.А. Теория случайных процессов: учебное пособие /А.А. Бутов, К.О. Раводин. – Ульяновск: УлГУ, 2009. – 56 с.
3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н., О некоторых задачах теории массового обслуживания., Изв. АН СССР, Техн. Кибернет., 1967, №5, 88 – 100 (РЖМат, 1968, 7В41)
4. Лоу М. Аверилл, Кельтон, В. Дэвид. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. – Спб.: Питер., 2004, - 847 с.
5. Рыков В.В., Управляемые системы массового обслуживания, Итоги науки и техн. Сер. Теор. Вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет., 1975, том 12, 43 – 153.
6. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. - М, Изд-во «Советское радио», 1965. – 503 с.
7. Butov A.A., On the problem of optimal instant observations of the linear birth and death process, Statistics & Probability Letters, 2015

Рецензенты:

Мищенко С.П., д.ф.-м.н., профессор ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет», г. Ульяновск;

Андреев А.С., д.ф.-м.н., профессор ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет», г. Ульяновск.