УДК 539.3

АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

[1]ТерентьевА.В.

[1]СПбГМТУ «Санкт-Петербургский Государственный морской технический университет», Санкт-Петербург, Россия (190121, г. Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3), e-mail: pptalex@mail.ru

Выведено вариационное уравнение, эквивалентное преобразованной системе уравнений осесимметричного деформирования оболочки вращения. В системе уравнений исключены осевое усилие и осевое перемещение и, которая за счет этого имеет четвертый порядок, в то время как исходная полная система уравнений имеет шестой порядок. Это позволило снизить количество кинематических переменных с трех до двух, что в конечном итоге дает возможность существенно уменьшить временные затраты компьютерных вычислений. Полученная матрица хорошо обусловлена, и все ее компоненты конечны. Реализована возможность перехода к теории Лява непрерывным образом. Введены перемещения, осевые и меридиональные усилия, внешние распределенные нагрузки, для того чтобы снизить размерность уравнений. В качестве неизвестных используются растягивающие усилия, изгибающие моменты и деформации растяжения и изгиба.

Ключевые слова: упругая оболочка, численные методы, вариационное уравнение, кинематические переменные.

ANALYSIS OF AXIS-SYMMETRIC DEFORMATIONS OF ELASTIC ROTATION SHELLS WITH RESOLVING SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS

[1]Terentev A.V.

[1]Saint-Petersburg State Marine Technical University, Saint-Petersburg, Russia (190121, Saint-Petersburg, street Lotsmanskaya, 3), e-mail: pptalex@mail.ru

Variation equation equivalent to recombined system of shell rotation's axis-symmetric deforming is derived. Axial force and axial displacement are excluded in the system of equations, thus, the latter one having fourth order and initial full system of equations having sixth order. This allowed to lower number of kinematic variables form three to two, finishing in opportunity to decrease time of computer calculations. The obtained matrix is well conditioned and all its components are limited. Possibility of transfer to Love theory is realized by continuous method. Displacements, axial and meridian force, outer distributed loadings are implemented to reduce dimension of equations. Tensile forces, bending moments and deformations of elongation and bending are included as unknowns.

Keywords: elastic shell, numerical methods, variation equation, kinematic variables.

Постановка задачи. Среди задач об осесимметричном деформировании упругих оболочек вращения аналитическое решение допускают лишь простейшие – обычно относящиеся к оболочкам правильной формы [4]. Зачастую необходимо применение численных методов: конечно-разностных (и связанных с ними) или вариационных (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, конечных элементов (МКЭ), вариационно-разностные). Наиболее распространенными являются вариационные методы, основанные на вариационном принципе Лагранже, в первую очередь – МКЭ [1]. Обычно они связаны с определением трех кинематических переменных: продольного и поперечного перемещений u, w и угла поворота θ. Возможно осуществить некоторое преобразование уравнений, при котором вместо u, w определяются радиальное и осевое перемещения u_r, w_r. Это дает ряд преимуществ, в том числе: более простое описание геометрии, менее строгие требования к гладкости дуги меридиана, аддитивность переменных в нелинейной задаче и др. Порядок системы, однако, при этом не изменяется. В то же время в статически-определимых задачах, когда несамоуравновешенная нагрузка априорно известна, удается выразить осевой усилие через известные величины, получить системы 4-го порядка относительно u_r, w и отдельно формулу для u_z (подобный прием используется при выводе уравнений Мейснера [4]).Полученная система, как и исходная система уравнений, обладает всеми необходимыми свойствами, чтобы сформулировать эквивалентный ей вариационный принцип. Любой вариационный метод, основанный на нем, приводит к разрешающей алгебраической системе меньшей размерности, что позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты. Такой подход применим фактически к любому корректному варианту теории оболочек: классическому (типа Лява [4]), с учетом сдвига (типа Тимошенко) [2], [3] поперечного обжатия и перекрестных слагаемых в соотношениях упругости, для оболочек сложной внутренней структуры [5], анизотропных и т.д. Конкретная реализация ниже осуществлена на примере простейших уравнений типа Тимошенко.

Вывод вариационного уравнения

Запишем в наиболее общем матричном виде уравнения осесимметричного деформирования оболочки вращения, согласующиеся с любым вариантом теории:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r}\left(rL^T x\right)' - K^T x - Hy + f = 0; \\ &Ly' + Ky = \varepsilon = C^{-1}x + e, \quad y' \equiv \frac{dy}{d\zeta}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь r,ζ – радиус и меридиональная координата; x, y, ε – векторы обобщенных усилий, перемещений и деформаций; f, e – векторы распределенных нагрузок и навязанных деформаций (вызванных, например, начальными напряжениями); C – матрица жесткости; H – матрица присоединенной жесткости (при наличии упругого подвеса); L, K – некоторые геометрические матрицы. Символ ^{T} означает транспонирование. Будем считать, что на краях заданы нулевые кинематические граничные условия или для некоторых компонент в общем случае – ненулевые граничные условия:

$$L^T x(0) = x_b(0); \; L^T x(l) = x_b(l). \tag{2}$$

Системе (1) совместно с граничными условиями (2) соответствует вариационный принцип Лагранжа, который формулируется следующим образом. Среди всех векторов y, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, решением задачи является тот, который доставляет функционалу V минимальное значение:

$$V \to \min_y, V = \int_0^l (w - w_f) r d\zeta - w_b, \tag{3}$$

где

$$w = w_0 - e^T C\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^T C\varepsilon + \frac{1}{2} y^T H y =$$

$$= w_0 - y^T K^T Ce - y'^T L^T Ce + \frac{1}{2} y'^T L^T CLy' + \tag{4}$$

$$+ y'^T L^T CKy + \frac{1}{2} y^T K^T CKy + \frac{1}{2} y^T Hy; \;\; w_f = y^T f;$$

$$w_b = \left(ry^T x_b\right)(l) - \left(ry^T x_b\right)(0) \quad - \tag{5}$$

удельная внутренняя энергия, удельная работа распределенной нагрузки, работа краевых сил. Слагаемое $w_0 = \frac{1}{2} e^T Ce$ в формуле для W является постоянным и может быть исключено из рассмотрения. Выражение под знаком интеграла в (3) может быть переписано в виде:

$$W - W_f = \frac{1}{2} y'^T Ry' + y'^T Sy + \frac{1}{2} y^T Ty - (y^T s + y'^T x_e) + const;$$

где

$$R = L^T CL; \; S = L^T CK; \; T = K^T CK + H; \; s = f + K^T Ce; \; x_e = L^T Ce. \tag{6}$$

Конкретизируем вид матриц для простейших уравнений типа Тимошенко. Предварительно введем обозначения для недостающих геометрических, а также физических характеристик: z – осевая координата; φ – угол между ортами r и ζ $(\cos\varphi = r', \sin\varphi = z')$; $R_1 = 1/\varphi'$; $R_2 = r/\sin\varphi$ – радиусы меридиональной и широтной кривизн; h – толщина; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона. Будем считать, что заданы продольная, поперечная и моментная распределенные нагрузки q_1, q_n, m_1, полная осевая сила P на краю $\zeta = 0$ и, возможно, другие краевые усилия. Неизвестными являются меридиональные и окружные растягивающие усилия $T_{1,2}$ и изгибающие моменты $M_{1,2}$, соответствующие им деформации растяжения $\varepsilon_{1,2}$ и изгиба $\omega_{1,2}$, перерезывающее усилие Q_1, сдвиг γ_1, перемещения u, w, поворот ν. Они подчиняются известным уравнениям [2], для которых матрицы и векторы, входящие в (1), равны

$$y = (u, w, \theta)^T; \quad x = (T_1, T_2, Q_1, M_1, M_2)^T; \quad e = 0;$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \omega_1, \omega_2)^T; \quad f = (q_1, q_n, m_1)^T;$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos\varphi}{r} & -\dfrac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{R_1} & \dfrac{\sin\varphi}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}^T;$$

$$C=\begin{pmatrix} B & \mu B & 0 & 0 & 0 \\ \mu B & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \mu D \\ 0 & 0 & 0 & \mu D & D \end{pmatrix}, \quad H=0; \tag{7}$$

$$B=\frac{Eh}{1-\mu^2};\ D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)};\ \Gamma=\Gamma_0\frac{Eh}{2(1+\mu)}. \tag{8}$$

Традиционное вариационное уравнение вытекает из (3), где использованы формулы (5), (6) и, согласно (7), вычислено

$$R=\begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix};\quad S=\begin{pmatrix} \mu B\dfrac{\cos\varphi}{r} & B\left(\dfrac{1}{R_1}+\mu\dfrac{\sin\varphi}{r}\right) & 0 \\ -\dfrac{\Gamma}{R_1} & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & \mu D\dfrac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}; \tag{9}$$

$$T=\begin{pmatrix} B\dfrac{\cos^2\varphi}{r^2}+\Gamma\dfrac{1}{R_1^2} & B\left(\dfrac{\mu}{R_1}+\dfrac{\sin\varphi}{r}\right)\dfrac{\cos\varphi}{r} & -\Gamma\dfrac{1}{R_1} \\ B\left(\dfrac{\mu}{R_1}+\dfrac{\sin\varphi}{r}\right)\dfrac{\cos\varphi}{r} & B\left(\dfrac{\mu}{R_1^2}+\dfrac{2\mu}{r}\dfrac{\sin\varphi}{R_1}+\dfrac{\sin^2\varphi}{r^2}\right) & 0 \\ -\Gamma\dfrac{1}{R_1} & 0 & D\dfrac{\cos^2\varphi}{r^2}+\Gamma \end{pmatrix},$$

$$s=(q_1,q_n,m_1)^T,\quad x_e=0.$$

Для построения уравнений пониженной размерности введем осевые и меридиональные усилия, перемещения и внешние распределенные нагрузки:

$$\begin{aligned} &N_2=T_1\sin\varphi-Q_1\cos\varphi;\ N_r=T_1\cos\varphi+Q_1\sin\varphi; \\ &u_z=u\sin\varphi-w\cos\varphi;\ u_r=u\cos\varphi+w\sin\varphi; \\ &q_z=q_1\sin\varphi-q_n\cos\varphi;\ q_r=q_1\cos\varphi+q_n\sin\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

Это позволяет записать два уравнения равновесия:

$$\frac{1}{r}(rN_r)'-\frac{1}{r}T_2+q=0;$$

$$\frac{1}{r}(rM_1)'-\frac{\cos\varphi}{r}M_2-N_r\sin\varphi+N_2\cos\varphi+m_1=0,$$

а из третьего уравнения

$$\frac{1}{r}(rN_z)'+q_z=0$$

и условия $2\pi rN_z(0)=P$ вычислить осевое усилие

$$N_z=\frac{1}{r}\left(\frac{P}{2\pi}-\int_0^z rq_z\,d\zeta_1\right); \tag{11}$$

в простейшем случае, при $q_1 = 0,\ q_n = const$

$$N_z = \frac{1}{r}\left(\frac{P}{2\pi} + q_n \frac{r^2 - r^2(0)}{2}\right).$$

Далее, свяжем новые перемещения с компонентами деформаций:

$$u_r' = \varepsilon_1 \cos\varphi + (\gamma_1 - \vartheta)\sin\varphi;\ u_z' = \varepsilon_1 \sin\varphi - (\gamma_1 - \vartheta)\cos\varphi;$$

$$\vartheta' = \omega_1,\ \vartheta \frac{\cos 2\varphi}{r} = \omega_2;\ \frac{u_r}{r} = \varepsilon_2.$$

Наконец, соотношения упругости перепишем в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{B}\left(N_r \cos\varphi + N_2 \sin\varphi\right) - \mu\varepsilon_2;\ T_2 = \mu\left(N_r \cos\varphi + N_z \sin\varphi\right) +$$

$$+ (1-\mu^2)B\varepsilon_2;\ \omega_1 = \frac{1}{D}M_1 - \mu\omega_2;\ \ M_2 = \mu M_1 + (1-\mu^2)D\omega_2;$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\Gamma}\left(N_r \sin\varphi - N_r \cos\varphi\right).$$

Подставив в уравнения равновесия и в выражения для производных от перемещений все выписанные формулы, получим систему уравнений относительно двух усилий и двух перемещений:

$$\frac{1}{r}\left(rN_r\right)' - \frac{\mu\cos\varphi}{r}N_r + (1-\mu^2)\frac{B}{r^2}u_r + q_r - \frac{\mu\sin\varphi}{r}N_z = 0;$$

$$\frac{1}{r}\left(rM_1\right)' - \frac{\mu\cos\varphi}{r}M_1 - N_r \sin\varphi - (1-\mu^2)\frac{\cos^2\varphi}{r^2}D\nu + m_1 + N_z\cos\varphi = 0,$$

$$u_r' + \frac{\mu\cos\varphi}{r}u_r + \vartheta\sin\varphi = \frac{1}{B_0}N_r + \frac{1}{B_1}N_z;$$

$$\vartheta' + \frac{\mu\cos\varphi}{r}\vartheta = \frac{1}{D}M_1. \tag{12}$$

и отдельно формулу для перемещения u_z (для определенности будем считать, что $u_z(l) = 0$), выраженного через них

$$u_z = -\int_{\zeta}^{l}\left(\frac{1}{B_1}N_r - \mu\frac{\sin\varphi}{r}u_r + \vartheta\cos\varphi + \frac{1}{B_2}N_z\right)d\zeta, \tag{13}$$

где обозначено

$$\frac{1}{B_0} = \frac{\cos^2\varphi}{B} + \frac{\sin^2\varphi}{\Gamma},\ \frac{1}{B_1} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{\Gamma}\right)\sin\varphi\cos\varphi,\ \frac{1}{B_2} = \frac{\sin^2\varphi}{B} + \frac{\cos^2\varphi}{\Gamma}. \tag{14}$$

Система (12) записывается в виде (1) при

$$y=(u_r,\vartheta)^T;\quad x=(N_r,M_1)^T;\quad e=(\frac{1}{B_1}N_z,0)^T;$$

$$f=\left(q_r-\frac{\mu\sin\varphi}{r}N_z,\, m_1+N_z\cos\varphi\right)^T;\, C=\begin{pmatrix}B_0 & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}; \tag{15}$$

$$H=\frac{1-\mu^2}{r^2}\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & D\cos^2\varphi\end{pmatrix};\, L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\, K=\begin{pmatrix}\frac{\mu\cos\varphi}{r} & \sin\varphi\\ 0 & \frac{\mu\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}.$$

Следовательно, ей соответствует вариационный принцип (3), в котором использованы формулы (5), (6), и, согласно (15), вычислено

$$R=\begin{pmatrix}B_0 & 0\\ 0 & D\end{pmatrix};\, S=\begin{pmatrix}\frac{\mu\cos\varphi}{r}B_0 & B_0\sin\varphi\\ 0 & \frac{\mu\cos\varphi}{r}D\end{pmatrix};$$

$$T=\begin{pmatrix}\frac{(1-\mu^2)B+\mu^2\cos^2\varphi B_0}{r^2} & \frac{\mu\sin\varphi\cos\varphi}{r}B_0\\ \frac{\mu\sin\varphi\cos\varphi}{r}B_0 & B_0\sin\varphi+D\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\end{pmatrix};$$

$$S=\left(q_r-\frac{\mu}{r}N_2\sin\varphi;\, m_1+\frac{B_2}{B}N_2\cos\varphi;\right)^T;\, \omega_e=\left(\frac{B_0}{B_1}N_2,0\right)^T. \tag{16}$$

Обсуждение результатов и выводы

Таким образом, задача об осесимметричном деформировании оболочки вращения свелась к модифицированному вариационному уравнению, имеющему ту же структуру, что и традиционное, но пониженную размерность. Отметим условный характер присущих ему понятий: внутренняя энергия, упругий подвес и т.д. – которые в данном случае являются характеристиками уравнений, но не исходной конструкции как таковой. Подчеркнем, что например, при использовании традиционного метода конечных элементов с переменными u_r, u_z, ν исключение узловых значений u_{z_k} не позволяет прийти к модифицированным конечно-элементным уравнениям. Наконец, укажем ряд дополнительных преимуществ полученного модифицированного уравнения, кроме тех, которые связаны с выбором переменных в неподвижных осях (они указаны в начале статьи) и пониженной размерности. К ним относится значительно лучшая обусловленность матриц и возможность непрерывного перехода к теории типа Лява, связанная с тем фактом, что все компоненты матриц остаются конечными при $\Gamma\to\infty$ (кроме тех точек, где $\varphi=\frac{\pi}{2}$).

Список литературы

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. – 428с.

2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1979. - 512с.

3.Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. - Львов: Вища школа, 1978. - 192 с.

4. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек Ленинград: Политехника, 1991. – 656 с.

5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. – 392 с.

Рецензенты:

Картузов Е.И., д.т.н., профессор кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского Государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург;

Сорокин С.В., д.т.н., профессор кафедры сопротивления материалов Санкт-Петербургского Государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург.