УДК 519.63

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЁМКОСТЬЮ

Нахушева Ф.М.[1], Водахова В.А.[1], Кудаева Ф.Х.[1], Абаева З.В.[1]

[1] ФГБОУ ВПО *«Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

Работа посвящена построению локально-одномерной схемы (ЛОС) повышенного порядка аппроксимации для многомерного уравнения диффузии дробного порядка, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоёмкость некоторой величины. С помощью принципа максимума для ЛОС получены априорные оценки в равномерной метрике, выражающие устойчивость ЛОС по входным данным. Из априорной оценки для погрешности следует равномерная сходимость решения ЛОС на кубической сетке. Краевые задачи для уравнения теплопроводности, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины, возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью. Аналогичные задачи возникают также в практике регулирования солевого режима почв. Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают при описании физических процессов стохастического переноса. Для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется также уравнение дробного порядка.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение диффузии, производная дробного порядка, сосредоточенная теплоёмкость, локально-одномерная разностная схема, устойчивость и сходимость разностных схем, априорная оценка.

LOCALLY ONE-DIMENSIONAL DIFFERENCE SCHEMES FOR THE FRACTIONAL ORDER DIFFUSION EQUATION WITH A CONCENTRATED HEAT CAPACITY

Nakhusheva F.M.[1], Vodahova V.A.[1], Kudaeva F.H.[1], Abaeva Z.V.[1]

[1] *"Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov "Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

The work deals with the construction of locally one-dimensional scheme (VOCs) high-order approximation for multidimensional diffusion equation of fractional order, when placed on the boundary of concentrated heat capacity of a certain value. With the help of the maximum principle for the VOC, a priori estimates in the uniform metric expressing resistance VOC input. From an a priori estimate for the error of uniform convergence solutions VOC cubic grid. Boundary value problems for the heat equation, when placed on the boundary of concentrated heat capacity of a certain value, arise when the body is considered a high thermal conductivity. Similar problems arise in practice control the salt regime of soils. Boundary problems for differential equations of fractional order appear in the description of physical processes stochastic transfer. To describe the motion of the impurity in the flow of a homogeneous fluid is used as the equation of fractional order.

Keywords: boundary value problem, diffusion equation, fractional order derivative of concentrated heat capacity, locally one-dimensional finite-difference scheme, stability and convergence of difference schemes, a priori estimate.

Краевые задачи для уравнения теплопроводности, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины, возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью [1]. Аналогичные задачи возникают также в практике регулирования солевого режима почв [5].

Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают при описании физических процессов стохастического переноса. Для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется также уравнение дробного порядка [2].

Численным методам решения уравнений с дробными производными посвящена, например, работа [3].

В одномерном случае задачи, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины, рассмотрены в [4]. В работе [10] построена локально-одномерная схема для многомерного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью. Здесь рассматривается случай многомерной задачи для уравнения диффузии дробного порядка, когда на границах области по каждому направлению x_k помещена сосредоточенная теплоёмкость величины $\chi_{\pm k}$, $k = 1, 2, \dots, p$. Локально-одномерные схемы для решения многомерных задач математической физики впервые введены в рассмотрение Самарским А.А. [7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0, T]$, основанием которого является p – мерный прямоугольный параллелепипед $\bar{G} = \left\{x = \left(x_1, x_2, \dots, x_p\right): 0 \leq x_k \leq l_k, k = 1,2, \dots, p\right\}$ с границей Γ, рассматривается задача:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = G \times (0, T], \tag{1}$$

$$Lu = \sum_{k=1}^{p} L_k u, \qquad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(K_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - q_k(x,t) u,$$

$$\begin{cases} K_k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \chi_{-k}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} + \beta_{-k}(x,t)u - \mu_{-k}(x,t), \ x_k = 0, \\ -K_k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \chi_{+k}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} + \beta_{+k}(x,t)u - \mu_{+k}(x,t), \ x_k = l_k, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x = \left(x_1, x_2, \dots, x_p\right) \in \bar{G}. \tag{3}$$

Коэффициенты удовлетворяют условиям: $0 < c_1 \leq K_k(x,t) \leq c_2$; $\beta_{-k}(x,t), \beta_{+k}(x,t) \geq \beta_*(x,t) > 0$; $\chi_{-k}(x,t), \chi_{+k}(x,t) > 0$; $q_k(x,t) \geq m > 0$, $k = 1,2, \dots, p$.

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}} d\eta$$

есть регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$, $\dot{u} = \partial u / \partial t$.

2. ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА

В замкнутой области $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0, T]$ строится сетка $\bar{\omega}'_\tau \times \bar{\omega}_h$, $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_1} \times \ldots \times \bar{\omega}_{h_p}$ – пространственная сетка, равномерная по каждому направлению x_k, $\bar{\omega}_{h_k} = \left\{x_k^{i_k} = i_k h_k,\ h_k = \frac{l_k}{N_k},\ i_k = 0,1, \ldots, N_k\right\}, k = 1,2, \ldots, p$. $\bar{\omega}'_\tau = \left\{0, t_{j+\frac{k}{p}} = \left(j + \frac{k}{p}\right)\tau, j = 0,1, \ldots, j_0 - 1; k = 1,2, \ldots, p\right\}$ – равномерная сетка, содержащая вместе с узлами $t_j = j\tau$, так называемые "фиктивные" узлы $t_{j+\frac{k}{p}} = \left(j + \frac{k}{p}\right)\tau,\ k = 1,2, \ldots, p - 1$, ω'_τ – множество узлов сетки $\bar{\omega}'_\tau$, для которых $t > 0$. Следуя [8], многомерному уравнению (1) поставим в соответствие цепочку "одномерных" уравнений. Для этого уравнение (1) перепишем в виде:

$$\mathcal{P}u = \partial_{0t}^\alpha u - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{p} \mathcal{P}_k u = 0, \quad \mathcal{P}_k u = \frac{1}{p}\partial_{0t}^\alpha u - L_k u - f_k.$$

Здесь $f_k(x,t), k = 1,2, \ldots, p,$ – произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$ и удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{p} f_k = f$. На каждом полуинтервале $\Delta_k = \left(t_{j+\frac{k-1}{p}},\ t_{j+\frac{k}{p}}\right], k = 1,2, \ldots, p,$ будем последовательно решать задачи:

$$\mathcal{P}_k v_{(k)} = \frac{1}{p}\partial_{0t}^\alpha v_{(k)} - L_k v_{(k)} - f_k = 0,\ x \in G, t \in \Delta_k,\ \ k = 1,2, \ldots, p, \tag{4}$$

$$\begin{cases} K_k(x,t)\dfrac{\partial v_{(k)}}{\partial x_k} = \chi_{-k}(x,t)\dfrac{\partial v_{(k)}}{\partial t} + \beta_{-k}(x,t)v_{(k)} - \mu_{-k}(x,t),\ x_k = 0, \\ -K_k(x,t)\dfrac{\partial v_{(k)}}{\partial x_k} = \chi_{+k}(x,t)\dfrac{\partial v_{(k)}}{\partial t} + \beta_{+k}(x,t)v_{(k)} - \mu_{+k}(x,t),\ x_k = l_k, \end{cases} \tag{5}$$

$$v_{(k)}(x,0) = u_0(x), \quad x_k \in \bar{\omega}_{h_k}, \tag{6}$$

полагая при этом

$$v_{(k)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right) = v_{(k-1)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right),\ k = 2,3, \ldots, p, \tag{7}$$

$$v_{(1)}(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1,2, \ldots, j_0 - 1.$$

Каждое уравнение (4) номера k будем аппроксимировать на полуинтервале Δ_k двухслойным разностным уравнением. В результате получим цепочку p одномерных разностных уравнений, которую вместе с граничными и начальными условиями назовем, следуя [8], локально-одномерной схемой. Итак, цепочка p одномерных разностных уравнений, соответствующих (4), имеет вид:

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=\Lambda_k\left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}}-(1-\sigma_k)y^{j+\frac{k-1}{p}}\right)+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\quad x\in\omega_h,\ k=1,2,\ldots,p. \qquad (8)$$

где σ_k – произвольный параметр, $\Lambda_k y=(a_k y_{\bar{x}_k})_{x_k}-d_k y,\ k=1,2,\ldots,p,$ – разностный оператор, соответствующий $L_k u$,

$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}$ – дискретный аналог дробной производной $\partial_{0t}^{\alpha}u$ порядка точности $O\left(\frac{\tau}{p}\right)$ [4], $y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}=\frac{y^{\frac{s}{p}}-y^{\frac{s-1}{p}}}{\tau/p}$.

Будем рассматривать случай чисто неявной схемы ($\sigma_k\equiv 1$). Задачу (4)-(6) заменим локально-одномерной разностной схемой:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}y=\bar{\Lambda}_k y^{j+\frac{k}{p}}+\Phi_k^{j+\frac{k}{p}}, \qquad (9)$$

$$y(x,0)=u_0(x),\qquad x\in\bar{\omega}_h, \qquad (10)$$

где

$$\bar{\Lambda}_k y^{j+\frac{k}{p}}=\begin{cases}\Lambda_k^{-}y^{j+\frac{k}{p}}=\frac{1}{0.5h_k}\left(a_k^{(1_k)}y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\chi_{-k}y_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar{\beta}_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}}\right), x_k=0,\\ \Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}}=(a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}})_{x_k}-d_k y^{j+\frac{k}{p}},\ \ x_k\in\omega_{h_k},\\ \Lambda_k^{+}y^{j+\frac{k}{p}}=\frac{1}{0.5h_k}\left(-a_k^{(N_k)}y_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}-\chi_{+k}y_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}}-\bar{\beta}_{+k}y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}\right), x_k=l_k,\end{cases} \qquad (11)$$

$$\Phi_k^{j+\frac{k}{p}}=\begin{cases}\tilde{\mu}_{-k},\quad x_k=0,\\ \varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\quad x_k\in\omega_{h_k},\\ \tilde{\mu}_{+k},\quad x_k=l_k,\end{cases} \qquad (12)$$

$\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}=f_k\left(x,t_{j+\frac{k}{p}}\right),\ \tilde{\mu}_{-k}=\frac{1}{0.5h_k}\bar{\mu}_{-k},\ \bar{\mu}_{-k}=\mu_{-k}+0.5h_k f_{k,0},\ \tilde{\mu}_{+k}=\frac{1}{0.5h_k}\bar{\mu}_{+k},$

$$\bar{\mu}_{+k} = \mu_{+k} + 0.5h_k f_{k,N_k}\,,\ \bar{\beta}_{-k} = \beta_{-k} + 0.5h_k q_{k,0}\,,\ \bar{\beta}_{+k} = \beta_{+k} + 0.5h_k q_{k,N_k}\,,$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} y = \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) y^{\frac{s}{p}}_{\bar{t}}.$$

3. ПОГРЕШНОСТЬ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНОЙ СХЕМЫ

Сделаем обозначение $z^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} - u^{j+\frac{k}{p}}$. Подставляя $y^{j+\frac{k}{p}} = z^{j+\frac{k}{p}} + u^{j+\frac{k}{p}}$ в (9)-(12) получим задачу для погрешности $z^{j+\frac{k}{p}}$. Для разностного уравнения получим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} z = \Lambda_k z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_k^{j+\frac{k}{p}},\ \ \psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} u, \qquad (13)$$

где

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} z = \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) z^{\frac{s}{p}}_{\bar{t}},$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} u = \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) u^{\frac{s}{p}}_{\bar{t}}.$$

Введем обозначение $\overset{\circ}{\psi}_k = \left(L_k u + f_k - \frac{1}{p}\partial^{\alpha}_{0t} u\right)^{\frac{1}{2}}$ и, замечая, что $\sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k = 0$, если выполнено условие $\sum_{k=1}^{p} f_k = f$, представим $\psi_k = \psi_k^{j+\frac{k}{p}}$ в виде суммы $\psi_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \psi^*_k$, где

$$\psi^*_k = \left(\Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} - L_k u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} u - \frac{1}{p}(\partial^{\alpha}_{0t} u)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Ясно, что $\psi^*_k = O(h_k^2 + \tau)$, $\overset{\circ}{\psi}_k = O(1)$, $\psi = \sum_{k=1}^{p}\psi_k = \sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k + \sum_{k=1}^{p}\psi^*_k = O(|h|^2 + \tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_p^2$.

Граничное условие (11) при $x_k = 0$ перепишем так

$$0.5h_k \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} y = a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \chi_{-k} y_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} - \left(\beta_{-k} + 0.5h_k q_{k,0}\right) y_0^{j+\frac{k}{p}} + \left(\mu_{-k} + 0.5h_k f_{k,0}\right). \quad (14)$$

В (14) подставим $y^{j+\frac{k}{p}} = z^{j+\frac{k}{p}} + u^{j+\frac{k}{p}}$ и будем иметь:

$$0.5h_k \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^{\alpha} z = a_k^{(1_k)} z_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \chi_{-k} z_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} - \left(\beta_{-k} + 0.5h_k q_{k,0}\right) z_0^{j+\frac{k}{p}} + a_k^{(1_k)} u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} -$$

$$-\chi_{-k} u_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} - \left(\beta_{-k} + 0.5h_k q_{k,0}\right) u_0^{j+\frac{k}{p}} + \left(\mu_{-k} + 0.5h_k f_{k,0}\right) - 0.5h_k \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^{\alpha} u.$$

Здесь

$$\psi_{-k} = a_k^{(1_k)} u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \chi_{-k} u_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} - \left(\beta_{-k} + 0.5h_k q_{k,0}\right) u_0^{j+\frac{k}{p}} + \left(\mu_{-k} + 0.5h_k f_{k,0}\right) - 0.5h_k \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^{\alpha} u.$$

К правой части последнего добавим и отнимем

$$0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} = 0.5h_k \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(K_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - q_k u + f_k - \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha} u\right]_{x_k=0}^{j+\frac{1}{2}}.$$

Тогда будем иметь:

$$\psi_{-k} = K_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} - \chi_{-k}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 - \beta_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} + 0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} +$$

$$+O(h_k^2 + \tau) = 0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + \psi^*_{-k}\,,$$

где

$$\overset{\circ}{\psi}_{-k} = \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(K_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - q_k u + f_k - \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha} u\right]_{x_k=0}^{j+\frac{1}{2}}.$$

Аналогично запишется и для граничного условия при $x_k = l_k$. Таким образом, имеем

$$0.5h_k \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^{\alpha} z = a_k^{(1_k)} z_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \chi_{-k} z_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} - \left(\beta_{-k} + 0.5h_k q_{k,0}\right) z_0^{j+\frac{k}{p}} + 0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + \psi^*_{-k}\,, x_k = 0,$$

$$0.5h_k \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^{\alpha} z = -a_k^{(N_k)} z_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} - \chi_{+k} z_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}} - \left(\beta_{+k} + 0.5h_k q_{k,N_k}\right) z_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} +$$

$$+0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{+k} + \psi^*_{+k}\,, x_k = l_k\,,$$

где $\psi^*_{\pm k} = O(h_k^2 + \tau)$, $\overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = O(1)$, $\sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = 0$, $\sum_{k=1}^{p} \psi^*_{\pm k} = O(|h|^2 + \tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_p^2$. Таким образом, локально-одномерная схема (9)-(12) обладает суммарной аппроксимацией $\psi = O(|h|^2 + \tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_p^2$.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНОЙ СХЕМЫ

Исследование устойчивости локально-одномерной схемы (9)-(10) будем проводить с помощью принципа максимума. Для этого разностное уравнение и граничное условия приведем к каноническому виду [6]:

$$A(P)y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q)+F(P)\,, \tag{15}$$

где P, Q узлы сетки, $Ш'(P)$ – окрестность узла P, не содержащая самого узла P. Коэффициенты $A(P)$ и $B(P,Q)$ должны удовлетворять условиям

$$A(P)>0, B(P,Q)>0, D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q)\geq 0. \tag{16}$$

Обозначим через $P(x,t')$ узел $(p+1)$ -мерной сетки $\Omega=\omega_h\times\omega_\tau^{'}$, где $x\in\omega_h$, $t'\in\omega_\tau^{'}$; через S – границу сетки Ω, состоящую из узлов $P(x,0)$ при $x\in\overline{\omega}_h$ и узлов $P\left(x,t_{j+\frac{k}{p}}\right)$ при $t_{j+\frac{k}{p}}\in\omega_\tau^{'}$ и $x\in\gamma_{h,k}$ для всех значений $k=1,2,\dots,p$ и $j=0,1,\dots,j_0$.

Распишем уравнение (9)

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=\left(a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}-d_k y^{j+\frac{k}{p}}+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, x\in\omega_h$$

в индексной форме и приведем к каноническому виду (15). Имеем:

$$\left[\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\left(t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}-t^{1-\alpha}_{0}\right)+\frac{a_{i_k+1}+a_{i_k}}{h_k^2}+d_{i_k}\right]y_{i_k}^{j+\frac{k}{p}}=$$

$$=\frac{a_{i_k+1}}{h_k^2}y_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{a_{i_k}}{h_k^2}y_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}-t^{1-\alpha}_{0}\right)y_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+$$

$$\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right)y_{i_k}^{0}+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right)y_{i_k}^{\frac{1}{p}}+\dots+\right.$$

$$\left.+\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)y_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right]+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}\ . \tag{17}$$

Здесь заметим, что

$$\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\left(t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)=\frac{1}{p^{1-\alpha}\,\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}\ , \tag{18}$$

$$\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\left(-t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}+2t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)=\frac{-\left(\frac{2\tau}{p}\right)^{1-\alpha}+2\left(\frac{\tau}{p}\right)^{1-\alpha}}{\tau\Gamma(2-\alpha)}=\frac{(2-2^{1-\alpha})}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}. \tag{19}$$

С учетом (18), (19) перепишем уравнение (17):

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+\frac{a_{i_k+1}+a_{i_k}}{h_k^2}+d_{i_k}\right]y_{i_k}^{j+\frac{k}{p}}=$$

$$=\frac{a_{i_k+1}}{h_k^2}y_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{a_{i_k}}{h_k^2}y_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}}+\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}(2-2^{1-\alpha})\right]y_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+$$

$$\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)y_{i_k}^0+\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}+2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)y_{i_k}^{\frac{1}{p}}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha}+2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)y_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right]+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\ \ i_k=1,2,\dots,N_k-1, \tag{20}$$

где $\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}=f_k\left(x,t_{j+\frac{k}{p}}\right),k=1,2,\dots,p.$

Приведем теперь граничные условия (11) для $x_k=0$ и $x_k=l_k$ к каноническому виду. Для $x_k=0$ с учетом (18), (19) имеем:

$$\left(\frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+\frac{a_k^{(1_k)}}{0.5h_k^2}+\frac{\chi_{-k}}{0.5h_k\tau}+\frac{\bar{\beta}_{-k}}{0.5h_k}\right)y_0^{j+\frac{k}{p}}=$$

$$=\frac{a_k^{(1_k)}}{0.5h_k^2}y_{1_k}^{j+\frac{k}{p}}+\left(\frac{\chi_{-k}}{0.5h_k\tau}+\frac{2-2^{1-\alpha}}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}\right)y_0^{j+\frac{k-1}{p}}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)y_0^0+\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}+2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)y_0^{\frac{1}{p}}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha}+2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)y_0^{j+\frac{k-2}{p}}\right]+\tilde{\mu}_{-k},\ i_k=0, \tag{21}$$

где $\tilde{\mu}_{-k}=\frac{1}{0.5h_k}\bar{\mu}_{-k}$, $\bar{\mu}_{-k}=\mu_{-k}+0.5h_kf_{k,0}$, $\bar{\beta}_{-k}=\beta_{-k}+0.5h_kq_{k,0}$.

Аналогично для краевого условия при $x_k = l_k$ с учетом (18), (19) имеем:

$$\left(\frac{a_k^{(N_k)}}{0.5h_k^2} + \frac{\chi_{+k}}{0.5h_k\tau} + \frac{\bar{\beta}_{+k}}{0.5h_k} + \frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\right) y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} =$$

$$= \frac{a_k^{(N_k)}}{0.5h_k^2} y_{N_k-1}^{j+\frac{k}{p}} + \left(\frac{\chi_{+k}}{0.5h_k\tau} + \frac{2-2^{1-\alpha}}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\right) y_{N_k}^{j+\frac{k-1}{p}} +$$

$$\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right) y_{N_k}^0 + \left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right) y_{N_k}^{\frac{1}{p}} + \cdots +\right.$$

$$\left.+\left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right) y_{N_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right] + \tilde{\mu}_{+k}, \quad i_k = N_k\,, \qquad (22)$$

где $\tilde{\mu}_{+k} = \frac{\bar{\mu}_{+k}}{0.5h_k}$, $\bar{\mu}_{+k} = \mu_{+k} + 0.5h_k f_{k,N_k}$, $\bar{\beta}_{+k} = \beta_{+k} + 0.5h_k q_{k,N_k}$.

Из (20)-(22) находим:

$$D\left(P\left(x_{i_k}, t_{j+\frac{k}{p}}\right)\right) = 0\,, D\left(P\left(0, t_{j+\frac{k}{p}}\right)\right) = \frac{\chi_{-k} + \tau\bar{\beta}_{-k}}{0.5h_k\tau}\,, D\left(P\left(l_k, t_{j+\frac{k}{p}}\right)\right) = \frac{\chi_{+k} + \tau\bar{\beta}_{+k}}{0.5h_k\tau},$$

где $\bar{\beta}_{-k} = \beta_{-k} + 0.5h_k q_{k,0}$, $\bar{\beta}_{+k} = \beta_{+k} + 0.5h_k q_{k,N_k}$, $q_k(x,t) \geq m > 0$, $\beta_{\pm k} \geq \beta_* > 0$.

Представим теперь решение задачи (9)-(12) в виде суммы $y = \bar{y} + \upsilon$, где $\bar{y}$ – решение задачи при $\varphi(x,t) = 0$, $u_0(x) = 0$; υ – решение задачи при $\tilde{\mu}_{-k} = \tilde{\mu}_{+k} = 0$ ($\bar{\mu}_{-k} = \bar{\mu}_{+k} = 0$). Оценки для решения $\bar{y}$ и υ будем получать с помощью принципа максимума для сеточного уравнения канонического вида (15) при выполнении на коэффициенты условий (16). Итак, имеем задачи для $\bar{y}$ и υ соответственно:

$$\Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha \bar{y} = \overline{\Lambda}_k \bar{y}^{j+\frac{k}{p}} + \Phi_k^{j+\frac{k}{p}}, \qquad x \in \omega_{h_k}, \qquad (23)$$
$$\bar{y}(x,0) = 0, \qquad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$\Phi_k^{j+\frac{k}{p}} = \begin{cases} \tilde{\mu}_{-k}, & x_k = 0, \\ 0, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \tilde{\mu}_{+k}, & x_k = l_k, \end{cases} \qquad (24)$$

$$\Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha \upsilon = \overline{\Lambda}_k \upsilon^{j+\frac{k}{p}} + \Phi_k^{j+\frac{k}{p}}, \qquad x \in \omega_{h_k}, \qquad (25)$$
$$\upsilon(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$\Phi_k^{j+\frac{k}{p}} = \begin{cases} 0, & x_k = 0, \\ \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ 0, & x_k = l_k. \end{cases} \tag{26}$$

где операторы $\overline{\Lambda}_k \bar{y}^{j+\frac{k}{p}}$ и $\overline{\Lambda}_k \upsilon^{j+\frac{k}{p}}$ имеют вид (11). Уравнение в (23) в канонической форме запишем:

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{a_{i_k+1} + a_{i_k}}{h_k^2} + d_{i_k}\right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} =$$

$$= \frac{a_{i_k+1}}{h_k^2}\, \bar{y}_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{i_k}}{h_k^2}\, \bar{y}_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{2-2^{1-\alpha}}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}\, \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} +$$

$$+ \frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)\bar{y}_{i_k}^{0} + \left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)\bar{y}_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \cdots +\right.$$

$$\left. + \left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)\bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right]. \tag{27}$$

Далее воспользуемся леммой из [4], согласно которой при $pj + k - 1 \geq 1$ имеет место неравенство

$$-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} > 0, j = 1,2, \dots, j_0 - 1, k = 2,3, \dots, p. \tag{28}$$

С учетом (28) выражения в круглых скобках положительны. Имеем, что для коэффициентов $A(P)$, $B(P,Q)$ и $D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)$ в уравнении (27) выполнены условия (16) и $D(P) = 0$. На основании теоремы 3 ([6], с.344) для $\bar{y}$ получаем оценку:

$$\left\|\bar{y}(x, t_{j+1})\right\|_C \leq \max_{0 \leq k \leq j+1} \frac{1}{\beta_*}\Big(\|\bar{\mu}_{-k}(t_k)\|_{C_\gamma} + \|\bar{\mu}_{+k}(t_k)\|_{C_\gamma}\Big). \tag{29}$$

Для оценки υ перепишем уравнение в (25) в виде:

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{a_{i_k+1} + a_{i_k}}{h_k^2} + d_{i_k}\right] \upsilon_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} =$$

$$\frac{a_{i_k+1}}{h_k^2}\, \upsilon_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{i_k}}{h_k^2}\, \upsilon_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{2-2^{1-\alpha}}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}\, \upsilon_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \Phi\left(P_{j+\frac{k}{p}}\right),$$

где

$$\Phi\left(P_{j+\frac{k}{p}}\right)=\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)\upsilon_{i_k}^{0}+\right.$$

$$\left.+\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}+2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)\upsilon_{i_k}^{\frac{1}{p}}+\cdots+\left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha}+2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)\upsilon_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right].$$

Проверим выполнение условий теоремы 4 ([6], с.347):

$$A\left(P_{(k)}\right)>0,\qquad B\left(P_{(k)},Q\right)>0,\qquad D'\left(P_{(k)}\right)=$$
$$=A\left(P_{(k)}\right)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B\left(P_{(k)},Q\right)=\frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+d_{i_k}>0, \tag{30}$$

$d_{i_k}\geq m>0$, $P_{(k)}=P\left(x,t_{j+\frac{k}{p}}\right)$. Условия (30) выполняются для всех $Q\in Ш''_{k-1}$, $Q\in Ш'_k$,

$$\sum_{Q\in Ш'(P)}B\left(P_{(k)},Q\right)=\frac{2-2^{1-\alpha}}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}>0,$$

$$\frac{1}{D'\left(P_{(k)}\right)}\sum_{Q\in Ш'(P)}B\left(P_{(k)},Q\right)=\frac{2-2^{1-\alpha}}{1+d_{i_k}p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}<1.$$

Здесь $Ш'_k$ – множество узлов $Q=Q(\xi,t_k)\in Ш'\left(P(x,t_k)\right)$, $Ш''_{k-1}$ – множество узлов $Q=Q(\xi,t_{k-1})\in Ш'\left(P(x,t_{k-1})\right)$.

Итак, на основании теоремы 4 (см. [6], с.347) для функции υ после суммирования по $k=1,2,\ldots,p$, а затем по $j'=0,1,\ldots,j$ имеем оценку:

$$\left\|\upsilon^{j+1}\right\|_C\leq\|\upsilon^0\|_C+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leq s\leq k}\left\|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_{C_h}. \tag{31}$$

Собирая оценки (29) и (31), получаем окончательную оценку:

$$\left\|y^{j+1}\right\|_C\leq\|y^0\|_C+\max_{0\leq k\leq j+1}\frac{1}{\beta_*}\left(\|\bar{\mu}_{-k}(t_k)\|_{C_\gamma}+\|\bar{\mu}_{+k}(t_k)\|_{C_\gamma}\right)+$$

$$+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leq s\leq k}\left\|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_{C_h}. \tag{32}$$

Из априорной оценки (32) следует устойчивость локально-одномерной схемы (9)-(12) по входным данным задачи.

5. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНОЙ СХЕМЫ

Чтобы использовать свойство $\sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k = 0$ представим, по аналогии с [8], решение задачи для погрешности (13) в виде суммы $z_{(k)} = \upsilon_{(k)} + \eta_{(k)}$, $z_{(k)} = z^{j+\frac{k}{p}}$. В этой сумме функция $\eta_{(k)}$ определяется условиями:

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\eta^{\frac{s}{p}}_{\bar{t}} = \overset{\circ}{\psi}_{-k}\,,\ x_k = 0,$$
$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\eta^{\frac{s}{p}}_{\bar{t}} = \overset{\circ}{\psi}_{k}\,,\ x_k \in \omega_{h_k}, \tag{33}$$
$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\eta^{\frac{s}{p}}_{\bar{t}} = \overset{\circ}{\psi}_{+k}\,,\ x_k = l_k,$$
$$\eta(x,0) = 0, \qquad x \in \bar{\omega}_{h_k}.$$

Функция $\upsilon_{(k)}$ определяется условиями:

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\upsilon_{(k)}{}^{\frac{s}{p}}_{\bar{t}} = \Lambda_k^-\upsilon_{(k)} + \tilde{\psi}_{-k}\,,\ x_k = 0\,,$$
$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\upsilon_{(k)}{}^{\frac{s}{p}}_{\bar{t}} = \Lambda_k\upsilon_{(k)} + \tilde{\psi}_{k}\,,\ x_k \in \omega_{h_k}, \tag{34}$$
$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\upsilon_{(k)}{}^{\frac{s}{p}}_{\bar{t}} = \Lambda_k^+\upsilon_{(k)} + \tilde{\psi}_{+k}\,,\ x_k = l_k\,,$$
$$\upsilon_{(k)}(x,0) = 0, x \in \bar{\omega}_{h_k}\,,$$

где $\tilde{\psi}_k = \psi^*{}_k + \Lambda_k\eta_{(k)}$, $\psi^*{}_k = O(h_k^2 + \tau)$, $\tilde{\psi}_{-k} = \frac{\psi^*{}_{-k}}{0.5h_k} + \Lambda_k^-\eta_{(k)}$, $\tilde{\psi}_{+k} = \frac{\psi^*{}_{+k}}{0.5h_k} + \Lambda_k^+\eta_{(k)}$.

На кубической сетке $h_1 = h_2 = \cdots = h_p = h$ при условиях $\chi_{-1} = \chi_{-2} = \cdots = \chi_{-p} = \chi_1$, $\chi_{+1} = \chi_{+2} = \cdots = \chi_{+p} = \chi_2$ справедливо:

$$\eta^{j+\frac{k}{p}} = O(\tau^\alpha),\ k = 1,2,\dots,p\ ,\ j = 0,1,\dots,j_0 - 1,$$

$$\Lambda_k\eta_{(k)} = -\tau^\alpha a_k\Lambda_k\left(\psi^\circ{}_1 + \psi^\circ{}_2 + \cdots + \psi^\circ{}_p\right),$$

где a_k – известные постоянные. Если существуют непрерывные в замкнутой области $\bar{Q}_T$ производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2\,\partial x_m^2}$, $k \neq m$, то $\Lambda_k\eta_{(k)} = O(\tau^\alpha)$. Для оценки решения задачи (34) воспользуемся оценкой (32):

$$\left\|\upsilon^{j+1}\right\|_C \le M\left[\max_{0\le j'+\frac{k}{p}\le j+1}\left(\left\|\tilde{\psi}_{-k}^{j'+\frac{k}{p}}\right\|_{C_\gamma}+\left\|\tilde{\psi}_{+k}^{j'+\frac{k}{p}}\right\|_{C_\gamma}\right)+\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha\sum_{k=1}^{p}\max_{0\le s\le k}\left\|\tilde{\psi}^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C\right], \qquad (35)$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ. Из оценки (35) находим, что

$$\left\|\upsilon^{j+1}\right\|_C \le M\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right), \qquad h = \max_{1\le k\le p} h_k\,,$$

откуда получаем

$$\left\|z^{j+1}\right\|_C \le \left\|\upsilon^{j+1}\right\|_C + \left\|\eta^{j+1}\right\|_C \le M\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right).$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Пусть задача (1)-(3) имеет единственное и непрерывное в* $\bar{Q}_T$ *решение и существуют непрерывные в* $\bar{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2\partial x_m^2},\frac{\partial^{2+\alpha}u}{\partial x_k^2\partial t^\alpha},\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \qquad 1\le k,m\le p,$$

$$\chi_{-1}=\chi_{-2}=\cdots=\chi_{-p}=\chi_1>0\,, \ \ \chi_{+1}=\chi_{+2}=\cdots=\chi_{+p}=\chi_2>0\,,$$

тогда решение разностной схемы (9)-(12) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1)-(3) со скоростью $O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right)$, $h^2 = o(\tau^{1-\alpha})\,, \frac{1}{2}<\alpha<1.$

Список литературы

1. Андреев В.Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1968. – Т.8. – №6. – С. 1218-1231.
2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – Т.185. – №4. – С. 739-740.
3. Головизнин В.М., Короткин И.А. Методы численных решений некоторых одномерных уравнений с дробными производными // Дифференц. ур-ния. – 2006. – Т.42. – №7. – С. 907-913.
4. Лафишева М.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т.48. – №10. – С. 1878-1887.

5. Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. Энерго- и массообмен в системе растение – почва – воздух. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973.
7. Самарский А.А. Об одной задаче распространения тепла // Избранные труды А.А. Самарского. – М.: МАКС Пресс, 2003. – С.1-22.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1973.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1996.
10. Шхануков-Лафишев М.Х., Нахушева Ф.М., Лафишева М.М., Мамбетова М.М. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью// Владикавказский математический журнал, Владикавказ. – 2013. – Т.15. – Вып.4. – С. 59-65.

Рецензенты:

Шхануков-Лафишев М. Х., д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик;

Ашабоков Б.А., д.ф.-м.н., профессор Высокогорного Геофизического Института, г. Нальчик.