

## АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОРТОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ВНЕШНЕГО НАГРУЖЕНИЯ

Шиверский А.В.<sup>1</sup>, Горохов А.Ю.<sup>1</sup>, Максимов П.В.<sup>1</sup>, Блинов А.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Россия (614990, Пермский край, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29), email: vmm@pstu.ru

Рассматривается большая ортогонально армированная вязкоупругая пластинка с круглым отверстием в центре при трех различных вариантах постоянного внешнего нагружения. Даны постановки трех квазистатических задач линейной анизотропной вязкоупругости, которые в общем случае содержат несколько независимых вязкоупругих операторов (многооператорная задача вязкоупругости). Решение поставленных задач произведено приближенным методом квазиконстантных операторов. Выполнена оценка погрешности полученных решений. В упругих постановках задачи решены численно методом конечных элементов. Произведено сравнение численных решений с известными аналитическими. Показана сходимость численных решений. Исследована эволюция окружных напряжений возле кромки отверстия в пластинках из органического пластика и стеклотекстолита. Установлено заметное изменение напряжений с течением времени. Произведена качественная и количественная оценка эволюции концентрации напряжений возле кромки отверстия. Показана возможность серьезного роста концентрации напряжений даже при постоянной внешней нагрузке.

Ключевые слова: анизотропия, многооператорная задача, вязкоупругость, метод конечных элементов

## ANALYSIS OF EVOLUTION OF STRESSES IN ORTHOTROPIC VISCOELASTIC PLATE IN VICINITY OF ROUND HOLE UNDER VARIOUS KINDS OF EXTERNAL LOADS

Shiversky A.V.<sup>1</sup>, Gorokhov A.Y.<sup>1</sup>, Maksimov P.V.<sup>1</sup>, Blinov A.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Perm National Research Polytechnic University, Russia (614990, Perm Region, city of Perm, Komsomolsky avenue, bld. 29), email: vmm@pstu.ru

Big orthogonally reinforced viscoelastic plate with round hole in center is studied under three different variants of constant external load. Three quasi-static linear anisotropic viscoelasticity tasks settings are given, which, in general case, contain several independent viscoelastic operators (multi-statement viscoelasticity problem). The set problems are solved by approximate method using quasi-constant operators. Inaccuracy of the received solutions is evaluated. In elastic settings the problems are solved numerically by finite elements method. Numeric solutions are compared to the known analytical solutions. Convergence of numeric solutions is shown. Evolution of circumferential stresses near edge of the hole is studied in plates made of organic and fiberglass plastics. Noticeable change of stresses in time is established. Qualitative and quantitative evaluation of evolution of stress concentrations near edge of the hole is performed. Possibility of serious growth of stress concentrations is shown even at constant external load.

Keywords: anisotropy, multi-statement problem, visco-elasticity, finite elements method

Рассмотрение задач длительного деформирования многих композиционных материалов и конструкций из них ведется в рамках линейной вязкоупругости анизотропных материалов. В общем случае постановка задачи содержит несколько независимых вязкоупругих операторов (многооператорная задача вязкоупругости), отражающих различие в свойствах ползучести композитов в разных направлениях. Решение линейных многооператорных задач связано с преодолением существенных математических сложностей, поэтому во многих случаях прибегают к эффективным приближенным методам на основе принципа Вольтерра. Одним из таких методов является метод квазиконстантных операторов, в рамках которого

считается, что все вязкоупругие операторы материала являются квазиконстантными [3, 7]. В ряде прикладных задач, когда внешние воздействия постоянны во времени, это означает, что приближенное решение краевой задачи вязкоупругости можно получить, заменив вязкоупругие операторы на соответствующие функции релаксации.

Рассматривается ортотропная пластинка из вязкоупругого композиционного материала с круглым отверстием радиуса  $R$  и характерным размером  $L$  (рис. 1). Предполагается, что  $R = L$ . Отверстие расположено в центре пластинки, направления армирования композита совпадают с направлениями координатных осей.

Рассматриваются следующие варианты нагружения: сдвиг усилиями, параллельными главным направлениям (задача 1); касательные усилия, равномерно распределенные по кромке отверстия (задача 2); внутренне давление по кромке отверстия (задача 3) (рис. 1).

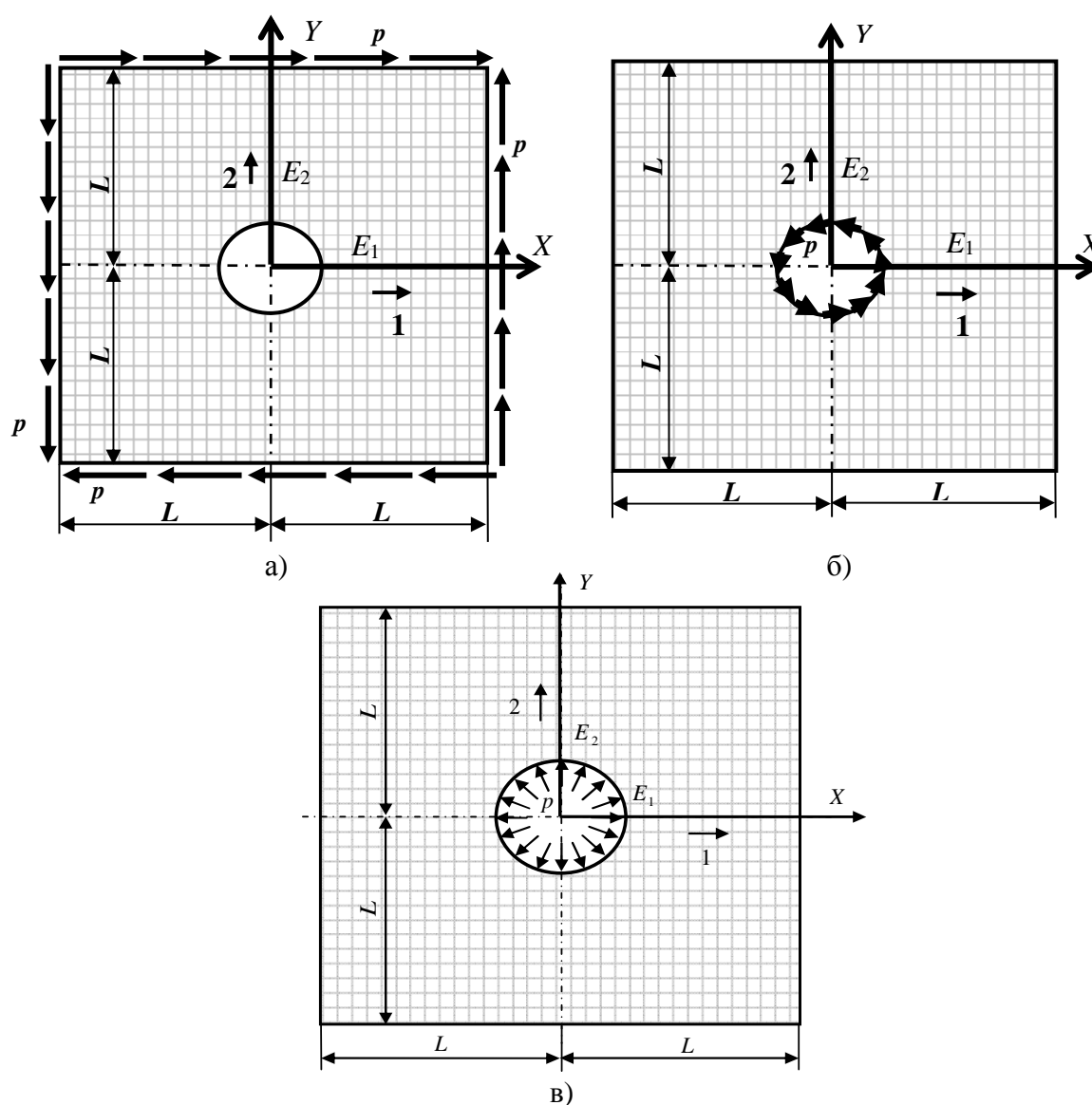


Рис. 1. Схема нагружения пластинки: а) сдвиг усилиями, параллельными главным направлениям (задача 1); б) касательные усилия, равномерно распределенные по кромке отверстия (задача 2); в) внутренне давление по кромке отверстия (задача 3)

Постановка задачи в рамках линейной теории вязкоупругости:

- уравнения равновесия:  $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}(x, y, t) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}(x, y) = 0, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}(x, y) = 0;$

- геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{xx}(x, y) = \frac{\partial u_x}{\partial x}(x, y), \varepsilon_{yy}(x, y) = \frac{\partial u_y}{\partial y}(x, y), \gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial u_x}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u_y}{\partial x}(x, y),$$

- физические соотношения в условиях плоского напряженного состояния (ПНС):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, y, t) &= \Pi_{xx}^* \sigma_{xx}(x, y, t) + \Pi_{xy}^* \sigma_{yy}(x, y, t), \\ \varepsilon_{yy}(x, y, t) &= \Pi_{xy}^* \sigma_{xx}(x, y, t) + \Pi_{yy}^* \sigma_{yy}(x, y, t), \quad \gamma_{xy}(x, y, t) = \Pi_{xyxy}^* \tau_{xy}(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\Pi_{xx}^*$ ,  $\Pi_{yy}^*$ ,  $\Pi_{xy}^*$ ,  $\Pi_{xyxy}^*$  – интегральные операторы вида

$$\Pi_{ijkl}^* f(t) = \int_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau) df(\tau) = \Pi_{ijkl}(0) \left( f(t) + \int_0^t K_{ijkl}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right). \quad (2)$$

Граничные условия при различных видах внешнего нагружения будут иметь вид:

- сдвиг усилиями, параллельными главным направлениям (задача 1)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{x=\pm L} &= 0, & \sigma_{yy}|_{y=\pm L} &= 0, & \tau_{xy}|_{y=\pm L} &= p_x = p(t), \\ \tau_{xy}|_{x=-L} &= -p_y = -p(t), & \tau_{xy}|_{x=L} &= p_y = p(t), & \tau_{xy}|_{y=-L} &= -p_x = -p(t), \end{aligned}$$

$$\left( \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \right) \Big|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \left( \tau_{yx} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y \right) \Big|_{x^2+y^2=R^2} = 0.$$

- касательные усилия, равномерно распределенные по кромке отверстия (задача 2)

$$\sigma_{xx}|_{x=\pm\infty} = 0, \sigma_{yy}|_{y=\pm\infty} = 0, \tau_{xy}|_{y=\pm\infty} = 0, \left\{ \begin{aligned} \left( \sigma_{xx} \bar{n}_x + \tau_{xy} \bar{n}_y \right) \Big|_{x^2+y^2=R^2} &= -p(t) n_y, \\ \left( \tau_{xy} \bar{n}_x + \sigma_{yy} \bar{n}_y \right) \Big|_{x^2+y^2=R^2} &= p(t) n_x. \end{aligned} \right.$$

- внутренне давление по кромке отверстия (задача 3)

$$\sigma_{xx}|_{x=\pm\infty} = 0, \tau_{xy}|_{x=\pm\infty} = 0, \sigma_{yy}|_{y=\pm\infty} = 0, \tau_{xy}|_{y=\pm\infty} = 0,$$

$$\left( \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \right) \Big|_{x^2+y^2=R^2} = n_x p(t), \left( \tau_{yx} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y \right) \Big|_{x^2+y^2=R^2} = n_y p(t).$$

Выше использованы следующие обозначения:  $\sigma$  – нормальные напряжения;  $\tau$  – касательные напряжения;  $\varepsilon$  – линейные деформации;  $\gamma$  – сдвиговые деформации;  $p(t)$  – внешняя распределенная нагрузка.

В упругой постановке рассмотренные задачи имеют аналитические решения, приведенные в [2]. Построены конечно-элементные модели задач и выполнена проверка их точности и сходимости. Сравнение численного решения с аналитическим производилось по

окружному напряжению  $\sigma_\theta$  возле кромки отверстия. Численные расчеты проведены в пакете ANSYS с использованием следующих упругих характеристик материала пластинки:  $E_1 = 2,8 \cdot 10^{10}$  Па,  $E_2 = 2,8 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_1 = 0,1$ ,  $G = 9,9 \cdot 10^9$  Па. Внешнее усилие принято постоянными  $p(t) = p_0 h(t)$ , где  $h(t)$  – функция Хевисайда. Результаты приведены в табл.1.

**Таблица 1**

Оценка численных моделей задач

Задача 1		Задача 2		Задача 3	
Число узлов на кромке отверстия	Относительная погрешность, %	Число узлов на кромке отверстия	Относительная погрешность, %	Число узлов на кромке отверстия	Относительная погрешность, %
60	12.7	60	7,8744	30	3,0770
120	5,0476	120	2,1605	60	2,7520
180	3,0566	180	1,5667	120	1,7247
240	2,0825	240	1,2918	–	–

Решение поставленных краевых задач вязкоупругости произведено отдельно для материалов пластинки органопластика и стеклотекстолита, вязкоупругие свойства которых приведены в работах [5] и [1] соответственно.

В [5] приведены данные об аппроксимации кривых ползучести однонаправленного органопластика. Ядра функций ползучести приняты в виде суммы экспонент. Физические соотношения для органопластика [5] содержат четыре независимых оператора  $\Pi_{1111}^*, \Pi_{1122}^*, \Pi_{2222}^*, \Pi_{1212}^*$  вида (2). Обращение определяющих уравнений вязкоупругой среды произведено в предположении, что все операторы являются квазиконстантными. В этом случае для любого момента времени справедливо равенство  $\mathbf{R}(t) = (\mathbf{\Pi}^{-1}(t))$ , где  $\mathbf{R}$  – тензор постоянных упругости, а  $\mathbf{\Pi}$  – тензор постоянных податливости. Значения показатели квазиконстантности операторов приведены в табл. 2.

**Таблица 2**

Показатели квазиконстантности органопластика и стеклотекстолита

Органопластик			
$\mu_{1111}$	$\mu_{2222}$	$\mu_{1122}$	$\mu_{1212}$
0,1267	0,0203	0,0936	0,2783
Стеклотекстолит			
$1 + k_1 \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta, t)$	$1 + k_2 \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta, t)$	$1 + \gamma \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta, t)$	–
0,0120	0,0072	0,0359	–

Характеристики ортотропной пластинки получены в виде пакета из двух ортогонально армированных однонаправленным композитом слоев:  $\mathbf{R}_{ort}(t) = (\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}_{90}(t))/2$ , где  $\mathbf{R}_{ort}$ ,  $\mathbf{R}$  – тензора постоянных упругости ортотропной пластинки и однонаправленного

органопластика;  $\mathbf{R}_{90}$  – тензор постоянных упругости однонаправленного органопластика при повороте на  $90^\circ$ .

Для стеклотекстолита из работы [1] определяющие уравнения содержат три независимых оператора:  $1+k_1\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta,t)$ ,  $1+k_2\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta,t)$  и  $1+\gamma\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta,t)$ , где  $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta,t)$  – дробно-экспоненциальная функция Работнова. Дальнейшие расчеты проводились в предположении, что операторы являются квазиконстантными. Значения показателей квазиконстантности определены по формуле из работы [4] и приведены в табл. 2:

$$\mu = \max_{t>0} \left| F_1(\alpha, x) / \left( \frac{\beta+k}{kx} + F_2(\alpha, x) \right) \right|,$$

где  $x = (\beta+k)t^{1+\alpha}$ ,  $F_2(\alpha, x) = \frac{1}{t^{1+\alpha}} \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta,t)$ ,  $F_1(\alpha, x) = \frac{1}{t^\alpha} \mathcal{E}_\alpha(-\beta,t)$ ,

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta,t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta t^{1+\alpha})^n}{\Gamma((1+\alpha)(1+n))}, \quad \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta,t) \cdot 1 = \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta,t-\tau) d\tau = t^{1+\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta t^{1+\alpha})^n}{\Gamma(1+(1+\alpha)(1+n))}.$$

Вычисление значений функций  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta,t)$  и  $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta,t)$  произведено в пакете MatLab. При больших значениях аргумента использованы асимптотические разложения и связь функции  $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta,t)$  с функцией Миттаг—Лаффлера [6].

Поставленные краевые задачи 1, 2, 3 для материала органопластика и стеклотекстолита решены при постоянной внешней нагрузке приближенным методом квазиконстантных операторов. Произведена оценка погрешности решения задач указанным методом. Оценка погрешности решения для материала, описываемого несколькими независимыми операторами, производится по формуле [4]:

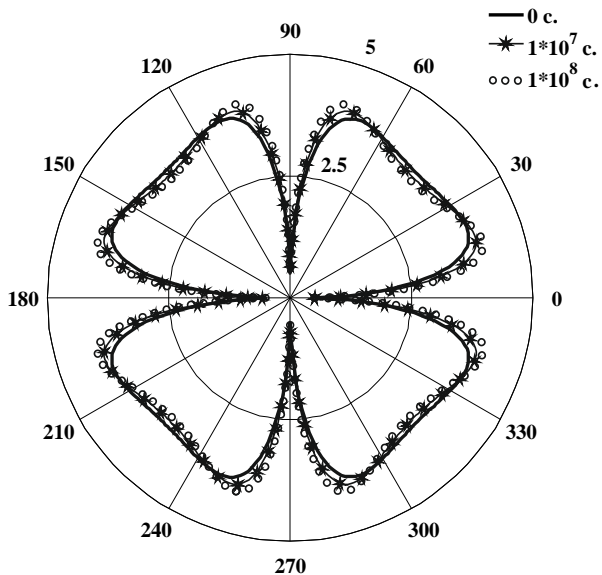
$$\Delta = \sum_{i \leq j}^N \Delta_{ij}(t), \text{ где } N \text{ – число независимых операторов.}$$

Для каждого из слагаемых погрешности  $\Delta_{ij}(t)$  выполняется оценка  $\Delta_{ij}(t) \sim O(\mu_i, \mu_j)$ , где  $\mu_i$  – показатели квазиконстантности независимых операторов.

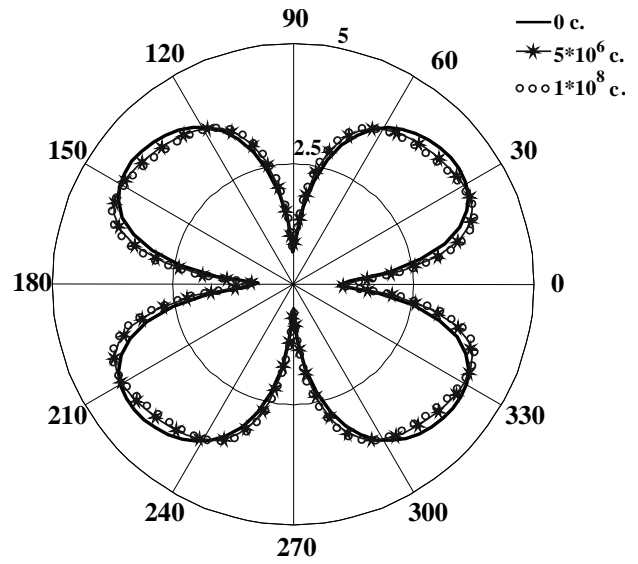
Исходя из приведенных в таблице 2 показателей квазиконстантности имеем следующие оценки погрешности: органопластик –  $\Delta = 0,1860$ ; стеклотекстолит –  $\Delta = 0,0023$ .

Задачи в упругой постановке решены численно методом конечных элементов.

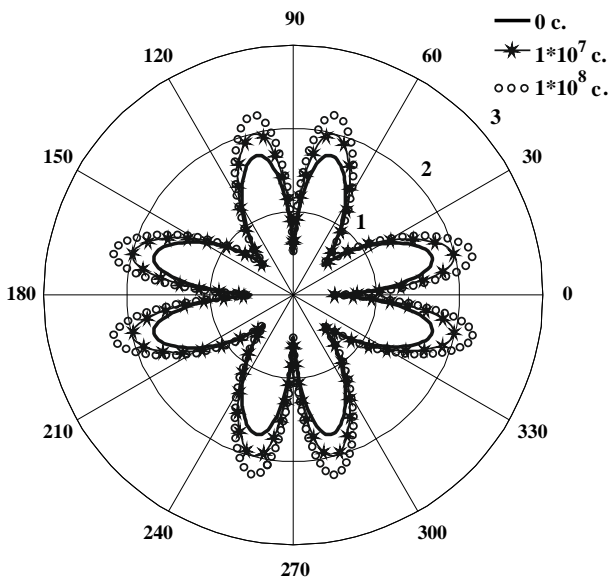
На рисунке 2 в полярной системе приведены графики изменения величин  $|\sigma_\theta| + 0,5$  для трех различных моментов времени. Здесь  $\sigma_\theta$  – окружное напряжение возле кромки отверстия, а коэффициент «0,5» имитирует отверстие радиуса 0,5, аналогично графикам, предложенным в работе [2].



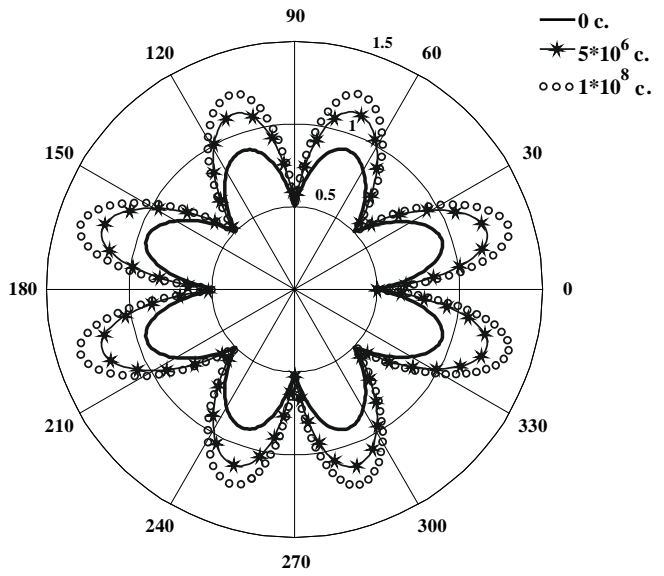
а)



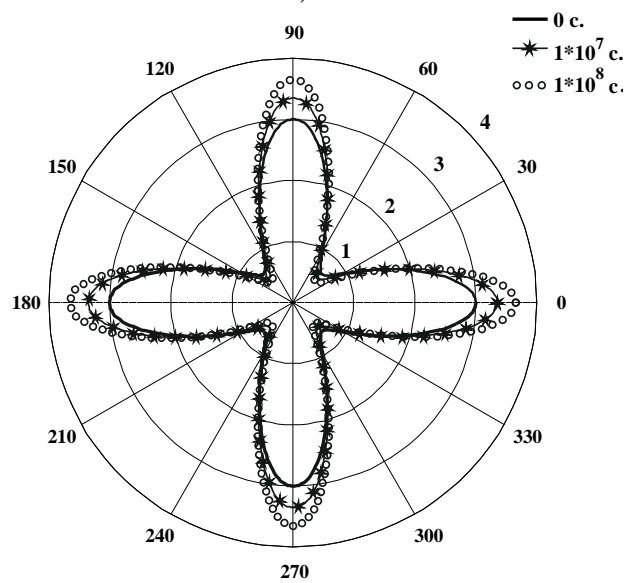
б)



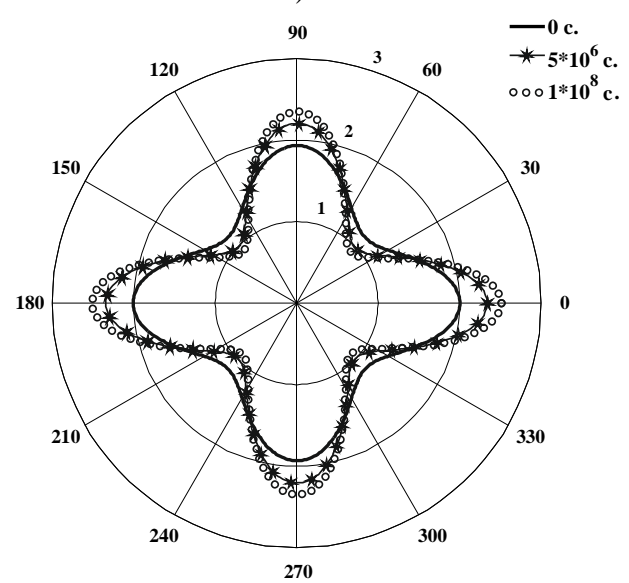
в)



г)



д)

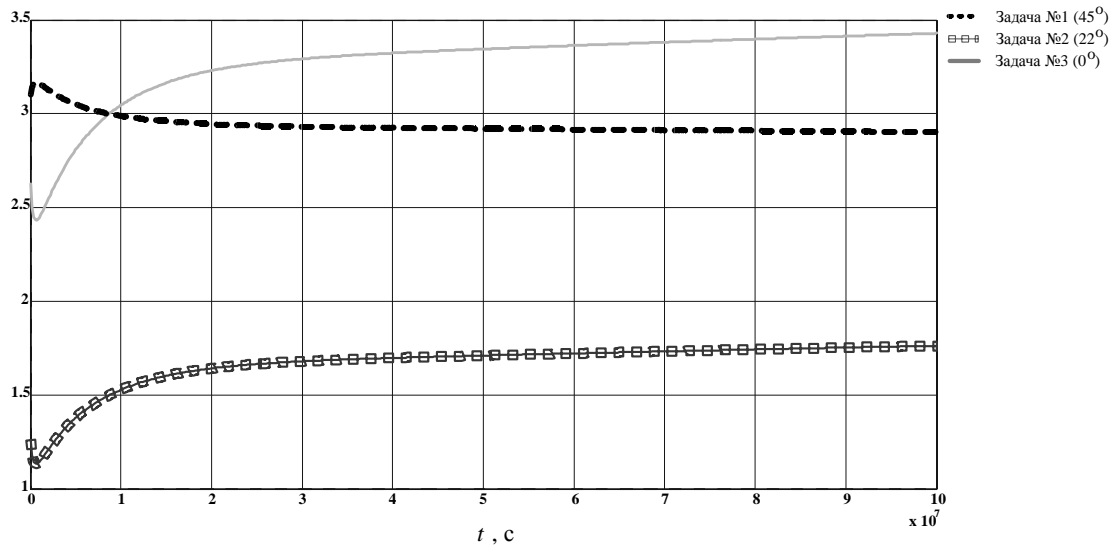


е)

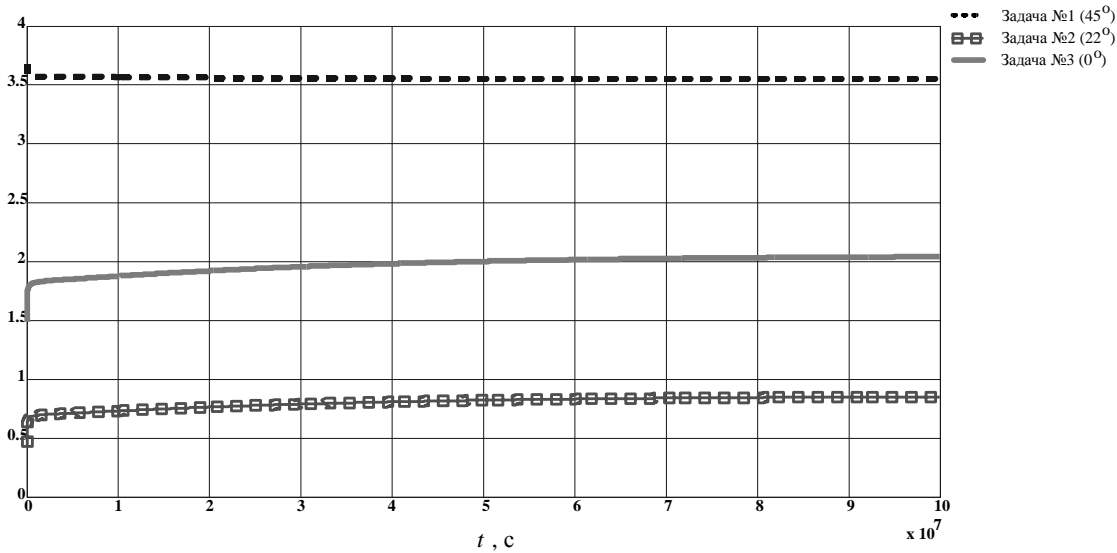
Рис. 2. Эволюция окружных напряжений  $\sigma_\theta$  у кромки отверстия.

Задача 1: а) органопластик, б) стеклотекстолит. Задача 2: в) органопластик, г) стеклотекстолит. Задача 3: д) органопластик, е) стеклотекстолит

Введем понятие коэффициента концентрации напряжений в виде  $k(\theta, t) = \sigma_{\theta}(\theta, t) / p_0$ , где  $p_0$  – значение постоянной внешней нагрузки. На рисунке 3 приведены графики изменения модуля коэффициента концентрации  $|k(t)|$  с течением времени для угла  $\theta$ , соответствующего наибольшему значению коэффициента в начальный момент времени.



а)



б)

Рис. 3. Изменение коэффициента концентрации напряжений  $|k(t)|$  во времени возле кромки отверстия: а) органопластик; б) стеклотекстолит

Количественное изменение коэффициентов концентрации, приведенных на рис.3, представлено в табл. 3.

Таблица 3

Изменение коэффициента концентрации напряжений во времени

	<b>Задача № 1</b>	<b>Задача № 2</b>	<b>Задача № 3</b>
Органопластик	6,44% ↓	39,00% ↑	30,58 % ↑
Стеклотекстолит	3,40% ↓	97,34% ↑	37,42% ↑

Итак, в рамках данной работы поставлены и решены задачи линейной анизотропной вязкоупругости в общей постановке для ортотропной пластинки с круглым отверстием при различных вариантах внешнего нагружения и различных свойствах материала пластинки. Исходя из результатов, представленных на рисунке 2, установлен эффект значительного перераспределения напряжений возле кромки отверстия даже при постоянной внешней нагрузке. На рисунке 3 и в таблице 3 показана возможность сильного роста концентрации напряжений с течением времени. Приближенный метод квазиконстантных операторов дал достаточно хороший и надежный результат решения многооператорных задач. Качественное и количественное различие изменения коэффициента концентрации на рисунках 3, а и б получено благодаря различию вязкоупругих свойств использованных для расчета материалов.

### **Список литературы**

1. Думанский А.М. Обращение определяющих уравнений наследственно-упругой ортотропной среды при плоском напряженном состоянии // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, № 4. – С. 482–493.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Малый В.И., Труфанов Н.А. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости кусочно-однородных материалов // Деформирование и разрушение структурно неоднородных материалов. – Свердловск: УрО РАН, 1989. – С. 78–85.
4. Методы прикладной вязкоупругости / Адамов А.А. [и др.]. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.
5. Плуме Э.З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа // Механика композиционных материалов. – 1985. – № 3. – С. 431–436.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука. – 1977. – С. 37–43.
7. Труфанов Н.А., Черепанова Л.М. Применение частичных аппроксимаций для повышения точности метода квазиконстантных операторов // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 2000. – № 1. – С 70–76.

### **Рецензенты:**



Шевелев Н.А., д.т.н., профессор кафедры «Динамика и прочность машин» ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», г. Пермь;  
Шардаков И.Н., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь.