УДК 378

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ (ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ ПАМЯТИ ВЫДАЮЩЕГОСЯ РУССКОГО МАТЕМАТИКА П.П.КОРОВКИНА)

Баданова Т.А.[1], Коровкина В.И.[1], Трунтаева Т.И.[1]

[1]ФГБОУ ВПО «Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского», Калуга, Россия, e-mail: rector@kspu.kaluga.ru

В статье представлены двойные неравенства и описаны возможности их анализа с позиции монотонности линейной функции и обратной пропорциональности, а также описаны виды заданий по данной теме для учащихся восьмых классов средних общеобразовательных школ. Традиционно школьный курс математики структурируется согласно содержательно-методических линий и очень важно показать, как эти линии связаны друг с другом, в частности знания о функциях позволяют анализировать двойные неравенства. Школьники, как правило, испытывают трудности в работе с двойными неравенствами: с применением двойных неравенств к оценке числовых и алгебраических выражений, преобразованием двойных неравенств. Предложенные в статье примеры задач и методические рекомендации по работе с учащимися над этими задачами, нацелены на развитие у школьников соответствующих умений. Материал, рассматриваемый в статье, получен в результате анализа методического опыта и апробирован в работе со школьниками в математической школе при Калужском государственном университете им. К.Э. Циолковского.

Ключевые слова: двойные неравенства, числовые неравенства, линейная функция, монотонность функции, числовые промежутки.

USING PROPERTIES OF FUNCTIONS FOR ANALYSIS OF NUMERICAL INEQUALITIES (FROM EXPERIENCE OF MATHEMATICS SCHOOL WORK TO MEMORY OF FAMOUS RUSSIAN MATHEMATICIAN P.P. KOROVKIN)

Badanova T.A.[1], Korovkina V.I.[1], Truntaeva T.I.[1]

[1]Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky e-mail: rector@kspu.kaluga.ru

Traditionally the course of mathematics for 11-year schools is structured according to technique-content lines. Up to 7 year of studying the line of functions realize it's preparing part only. With this work students develop their skills in transformation of numeric and algebraic expressions, proving of numerical and algebraic equations and inequalities, solving equations and inequalities. All these directions of work realize the numerical line, the line of transformation of algebraic expressions, the line of equations and inequalities. So it is important to demonstrate to students connections between their knowledge and new for them material about functions, kinds of functions and properties of functions. For this point kinds of tasks for students of 7 or 8 year studying at 11-year schools are described in this article. Involving such tasks in learning process allow to demonstrate to students the possibility of use their new knowledge about functions for analysis double inequalities. Such tasks are created as a result of the analysis of teaching experience and tested in the work with students at the mathematics school at Tsiolkovsky University in Kaluga.

Keywords: technique and content of mathematics education at 11-year schools, analysis of inequalities, functions and its properties in solving of problems in the course of mathematics at 11-year schools.

Линия уравнений и неравенств является одной из основных линий школьного курса математики. От успешности усвоения ее содержания зависит и успешность овладения учащимися различными разделами, как школьного курса математики, так и курсом высшей математики. Анализируя содержание учебного материала курса алгебры основной школы на предмет изложения в нем вопросов, связанных с числовыми неравенствами и их свойствами, важно отметить, что, не смотря на то, что отношения «больше» и «меньше» на интуитивном уровне формируются у обучающихся уже в начальной школе, определение этих отношений и их свойства изучаются только в 8 классе. Это обусловлено определенными трудностями, которые вытекают из особенностей, свойств и, как следствие преобразований неравенств.

В курсе алгебры 8 класса вводится следующее определение понятий «больше» и «меньше» для чисел: «число *а* больше числа *в*, если разность чисел *а-в* - число положительное; число *а* меньше числа *в*, если разность чисел *а-в* - число отрицательное», на основании которого можно работать только с неравенствами, в которых знаком «больше» или «меньше» связаны только два числа (или выражения). Далее изучаются следующие свойства числовых неравенств:

1. Если $a < b$, то $b > a$. Если $a > b$, то $b < a$;
2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
3. Если $a < b$, и c — любое число, то $a + c < b + c$;
4. Если $a < b$, и c — положительное число, то $a \cdot c < b \cdot c$. Если $a < b$, и c — отрицательное число, то $a \cdot c > b \cdot c$;
5. Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;
6. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;
7. Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c, d — положительные числа, то $a \cdot c < b \cdot d$;
8. Если $a < b$ и, a и b — положительные числа, то $a^n < b^n$,
   где n — натуральное число [1].

На основании определения и перечисленных свойств можно выполнять некоторые операции над неравенствами: умножение обеих частей на число, знак которого известен, сложение неравенств одного знака, умножение неравенств при определенных условиях и т.д. Они так же используются при доказательстве числовых неравенств [3] и в дальнейшем, позволяют выполнять равносильные преобразования при решении неравенств с одной переменной и исследовать свойства функций.

Однако, применение определения и вышеуказанных свойств для работы с числовыми неравенствами, в школьном курсе алгебры, ограничивается преимущественно только рамками данной темы. Так же важно отметить, что двойные неравенства из рассмотрения практически исключаются. В школьном курсе алгебры они используются для записи числовых промежутков, или для оценки значений функции. Поэтому целью нашего исследования является изучение возможности расширения данной темы на примере работы с двойными числовыми неравенствами. Для этого приведем анализ двойных неравенств, используя свойства линейной функции и обратной пропорциональности, тем самым показывая связь линии уравнений и неравенств с функциональной линией курса алгебры основной школы.

Этот подход мы использовали на занятиях в физико-математической школе «Омега» при КГУ им. К.Э. Циолковского мы использовали для анализа двойных неравенств. Он заключался в использовании свойства монотонности ограниченных функций на данном отрезке. Приведем рассуждения о свойствах неравенств с позиции функционального подхода.

Пусть $x \in [a, b](a \le x \le b), y \in [c, d](c \le y \le d)$ и пусть рассматривается операция $x \Theta y$, где Θ либо «+», либо «-», либо «$\cdot$». Требуется установить тот промежуток, в котором лежит $x \Theta y$. Для этого необходимо установить левую и правую границы промежутка. Рассмотрим при фиксированном значении x следующие функции: $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$. Они являются монотонными, поэтому их наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах промежутка для переменной y, т.е. в точках либо c, либо d. Зафиксировав значение y и проводя аналогичные рассуждения относительно переменной x, приходим к выводу, что наибольшее и наименьшее значения указанных функций достигаются на концах промежутка $[a, b]$. Таким образом, для решения вопроса о границах промежутка, необходимо оценить четыре соотношения $a\Theta c$, $a\Theta d$, $b\Theta c$, $b\Theta d$. Самое большое из них будет правой границей искомого промежутка, а самое маленькое – левой.

Рассмотрим отдельно каждую из выше обозначенных функций. В случае операции «+» функция $x+y$ монотонно возрастает как относительно x при фиксированном y, так и относительно y при фиксированном x (является линейной с угловым коэффициентом k равным 1 как для аргумента x, так и для аргумента y). Поэтому наибольшее значение функции будет $b+d$, а наименьшее $a+c$. Таким образом, получаем промежуток $a+c \le x+y \le b+d$. Получившееся неравенство является следствием свойства 6, применимо к двойным неравенствам.

В случае операции «-», функция $x-y$ монотонно возрастает относительно переменной x при фиксированном y (то есть является линейной с угловым коэффициентом k равным 1). И монотонно убывает относительно переменной y, при фиксированном x (линейная с угловым коэффициентом k равным -1). Поэтому наибольшее значение функция $x-y$ будет принимать при наибольшем значении x и наименьшем значении y, а наименьшее - при наименьшем x и наибольшем y. Таким образом, получаем промежуток $a-d \le x-y \le b-c$. С другой стороны, используя вышеописанные свойства, применительно к двойным неравенствам получаем следующую цепочку неравенств: $a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad -d \le -y \le -c, \quad a-d \le x-y \le b-d$.

В случае операции «$\cdot$» функция $x \cdot y$ возрастает относительно x при фиксированном положительном значении y (линейная с положительным угловым коэффициентом) и убывает при фиксированном отрицательном значении y (линейная, с отрицательным угловым коэффициентом). Аналогичные рассуждения проводим для данной функции относительно переменной y при фиксированном значении x разных знаков. Таким образом, можно сделать вывод, что эта функция может принимать наибольшее положительное значение, как при положительных, так и при отрицательных значениях переменных x и y, и эти значения будут определяться наибольшим и наименьшим значениями чисел $a \cdot c$, $a \cdot d$, $b \cdot c$, $b \cdot d$.

Рассмотрим произведение $x \cdot y$, как произведение модулей этих величин, $x \cdot y = |x| \cdot |y|$, как при $x > 0$ и $y > 0$, так и при $x < 0$ и $y < 0$. Поэтому в данном случае наибольшее и наименьшее значение произведения будет находиться как $\max\{bd, ac\}$ $и$ $min\{ad, bc\}$, $\max\{bd, ac\} \leq xy \leq min\{ad, bc\}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) $a > 0,\ c > 0,$

$a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \Rightarrow ac \leq xy \leq bd$;

Данное неравенство получается как следствие использования свойства 7 применительно к двойным неравенствам. Однако, данное свойство справедливо только для положительных границ неравенства, поэтому остальные случаи для границ неравенства требуют отдельного рассмотрения.

2) $a < 0, b > 0, c > 0,$

$a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \Rightarrow ad \leq xy \leq bd$;

3) $b < 0,\ c > 0,$

$a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \Rightarrow ad \leq xy \leq bc$.

Теперь рассмотрим операцию деления, то есть $\frac{x}{y}$. Данное отношение можно преобразовать, сведя операцию деления к операции умножения: $x \cdot \frac{1}{y}$. При этом в случае, когда $0 < c < d$, $\frac{1}{y} \epsilon \left[\frac{1}{d}; \frac{1}{c}\right]$, а когда $d < c < 0$, $\frac{1}{y} \epsilon \left[\frac{1}{c}; \frac{1}{d}\right]$. Функция $\frac{x}{y}$ возрастает относительно x при фиксированном положительном значении y (линейная с положительным угловым коэффициентом) и убывает при фиксированном отрицательном значении y (линейная с отрицательным угловым коэффициентом). Относительно переменной y при фиксированном положительном значении x данная функция убывает (обратная пропорциональность с положительным коэффициентом) и возрастает при отрицательном значении x (обратная пропорциональность с отрицательным коэффициентом). Следовательно, ее наибольшее и наименьшее значения находим среди чисел $a \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c}$; $a \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{d}$; $b \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$; $b \cdot \frac{1}{d} = \frac{b}{d}$.

Особого рассмотрения требует случай, когда одна из границ промежутка для переменной y равна нулю. Если промежуток замкнутый относительно нуля (нестрогое неравенство), то один из концов промежутка будет не определен (деление на нуль). Если промежуток открытый относительно нуля, то используя идею предельного перехода, можно определить значения функции на концах промежутка. Например, если $0 < y \leq d$, $a < 0, b > 0$, $a \leq x \leq b$, то $-\infty < \frac{x}{y} < +\infty$; если $a > 0, b > 0$, то $\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < +\infty$. Таким, образом, в процессе изучения данной темы на интуитивном уровне осуществляется пропедевтика одного из основных понятий математического анализа как предел функции в точке.

Таким образом, проведенный анализ позволяет определить интервал, которому будет принадлежать выражение, представляющее сумму, разность, произведение или частное монотонных функций определенных на данном промежутке, с одной стороны, с другой стороны позволяет выполнять выше обозначенные операции над двойными неравенствами. Использованный теоретический материал не выходит за рамки курса алгебры основной школы, так как линейная функция и функция обратная пропорциональность изучаются в 7 и 8 классах, и дает возможность для расширения и углубления темы «Числовые неравенства».

Приведем некоторые задания для учащихся, иллюстрирующие возможность применения описанных теоретических рассуждений.

На первом этапе работы с двойными неравенствами учащимся могут быть предложены следующие задания:

1) оценить значение выражения $x + 2y, \textit{если}\ 3 < x < 5, -4 < y < 7,\ \textit{и}\ m < x < n, p < y < q$;
2) оценить значение выражения $-5x + 7y, \textit{если} - 2 < x < 5, -4 < y < 7,\ \textit{и}\ m < x < n, p < y < q$;
3) оценить значение выражения $-3x \cdot y, \textit{если} - 2 < x < 5, -4 < y < 7,\ \textit{и}\ m < x < n, p < y < q$;
4) оценить значение выражения $\frac{x}{y}, \textit{если} - 2 < x < 5, -4 < y < 7,\ -2 < x < 5, -4 < y < 0, -2 < x < 5, 0 < y < 7\ \textit{и}\ m < x < n, p < y < q$;

При этом нужно разобрать случаи с различными по знаку значениями на концах промежутков, для строгих и нестрогих неравенств и, решая четвертое задание в общем виде наложить условия на границы.

5) каким неравенством связаны концы промежутка для переменной x и ноль, если $\frac{m}{p} < \frac{x}{y} < \frac{n}{q}$, *если* $0 < q < y < p,\ (q < y < p < 0)$;
6) каким неравенством связаны концы промежутка для переменной y и ноль, если $\frac{m}{p} < \frac{x}{y} < \frac{n}{q}$, *если* $0 < m < x < n,\ (m < x < n < 0)$.

В процессе решения таких заданий с одной стороны важным является их анализ, как с позиции известных учащимся свойств числовых неравенств, так и с позиции использования свойств функций для оценки выражений.

Умение работать с двойными неравенствами позволяет решать задачи, связанные с оценкой различных величин. Приведем пример такого задания.

Пример1. Найти целую часть числа

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Решение. Воспользуемся неравенствами

$$1 \leq 1 \leq 1;$$

$$0{,}7 < \sqrt{\frac{1}{2}} < 0{,}8;$$

$$0{,}5 < \sqrt{\frac{1}{3}} < 0{,}6;$$

$$0{,}5 \leq \sqrt{\frac{1}{4}} \leq 0{,}5;$$

$$0{,}4 < \sqrt{\frac{1}{5}} < 0{,}5.$$

(они получаются при извлечении корней с точностью до 0,1 с недостатком и избытком). Складывая эти неравенства, получаем

$$1 + 0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}4 < x < 1 + 0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}5,$$

$$3{,}1 < x < 3{,}4 \text{ и следовательно, } [\mathrm{x}] = 3.$$

Обобщением данной задачи является следующий пример.

Пример 2. Найти целую часть числа

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

Навыки, сформированные у учащихся в процессе изучения данной темы, могут быть использованы при изучении функциональной линии, то есть при решении задач на нахождение области значений функции, представляющей собой сумму, произведение или частной функций, монотонных на заданном промежутке.

В основной школе учащимся могут быть предложены следующие задания: оценить значение выражений $\sqrt{x}+(2x-3)$; $\sqrt{x}-(2x-3)$; $\sqrt{x}\cdot(2x-3)$; $\frac{\sqrt{x}}{(2x-3)}$, если $x\in[1;9]$;

$$\sqrt{x+10}+(x-3);\ \sqrt{x+10}-(x-3);\ \sqrt{x+10}\cdot(x-3);\ \frac{\sqrt{x+10}}{(x-3)}, \text{если } x\in[-1;6].$$

В старшей школе учащимся могут быть предложены аналогичные задания, с использованием трансцендентных функций.

Также важно отметить, что оценка двойных неравенств в общем виде позволяет осуществлять подготовку учащихся к решению задач с параметрами.

Список литературы

1. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд.стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.: ил.
2. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2009. — 336 с
3. Гомонов С. А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10 – 11 классы: учебное пособие. – М.: Дрофа, 2006. – 256 с.: ил.
4. Коровкин П.П. Неравенства. – 5-е изд. – М.: Наука, 1983. – 72 с.
5. Коровкина В.И. Математика: Методические рекомендации по математике для поступающих в вузы. Часть I и II. - Калуга: Издательство КФ МГЭИ, 2004. – 156 с.
6. Ярский А. Как доказать неравенство // Квант. – 1997. - № 2. – С. 35-37.

Рецензенты:

Кристя В.И., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Высшая математика» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана , г.Калуга;

Щербатых С.В., д.п.н., доцент, проректор по учебной работе, профессор кафедры «Математика и методика ее преподавания» ФГБОУ ВПО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», г.Елец.