УДК 37.016:53

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАНИЯ 17 УЧАСТНИКАМИ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ В АЛТАЙСКОМ КРАЕ

Кисельников И.В.

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, e-mail: kiv@altspu.ru

В данной статье авторы исходят из того, что содержание, форма и результаты итогового экзамена влекут за собой изменения в содержании и методах школьного обучения. В связи с этим этап анализа результатов Единого государственного экзамена по математике является необходимым условием совершенствования математической подготовки школьников и математического образования в целом. В статье анализируются количественные и качественные результаты выполнения одного из заданий, предполагавшем развёрнутую форму ответа, участниками ЕГЭ профильного уровня в Алтайском крае. В статье приведена статистическая информация по выполнению задания 17 в Алтайском крае. Предложена классификация ошибок, допущенных участниками ЕГЭ при решении этого задания. Проведён анализ типичных ошибок, допущенных участниками Единого государственного экзамена в Алтайском крае при решении задания 17. Типичные ошибки проиллюстрированы примерами из работ участников единого государственного экзамена в Алтайском крае.

Ключевые слова: математическое образование, цели математического образования, оценка качества образования, средства оценивания результатов обучения, типичная ошибка, методы решения неравенств, метод интервалов, допустимые преобразования неравенства.

COMMON MISTAKES WHEN SOLVING PROBLEMS 17 PARTIES USE IN MATHEMATICS PROFILE LEVELS IN THE ALTAI REGION

Kiselnikov I.V.

Altai State Pedagogical University, Barnaul, e-mail: kiv@altspu.ru

In this article authors recognize that the contents, the form and results of final exam involve changes in the contents and methods of school training. In this regard the analysis stage of results of the Unified state examination in mathematics is a necessary condition of improvement of mathematical training of school students and mathematical education in general. . In article quantitative and qualitative results of performance of one of tasks, assuming the developed answer form, participants of Unified State Examination of profile level in Altai Krai are analyzed. The statistics on a task 17 Altai Krai in is given in article. Classification of the mistakes made by participants of Unified State Examination at the solution of this task is offered. The analysis of the typical mistakes made by participants of the Unified state examination in Altai Krai at the solution of a task 17 is carried out. Typical mistakes are illustrated with examples from works of participants of the Unified state examination in Altai Krai.

Key words: mathematical education, purposes of mathematical education, assessment of quality of education, means of estimation of results of training, typical mistake, methods of the solution of inequalities, method of intervals, admissible transformations of an inequality.

Согласно Концепции развития математического образования РФ, утвержденной Правительством РФ в 2013 году, одна из целей основного общего и среднего образования – обеспечение необходимого стране числа выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования [11]. Система школьного математического образования должна обеспечить расширенное производство кадрового потенциала, способного осуществлять на современном и перспективном уровне научно-технический прогресс во всех областях принципиальной применимости всего спектра математических знаний [3]. Эта цель имелась в виду при разделении в 2015 году единого государственного экзамена по математике на профильный и базовый уровни.

Ясно, что содержание и форма итогового экзамен по математике не являются нейтральными независимыми характеристиками для школьного математического образования. Аттестационная процедура ЕГЭ неизбежно влечёт за собой изменения в содержании и методах школьного обучения [3].

Этап анализа результатов ЕГЭ является необходимым условием совершенствования математической подготовки школьников и математического образования в целом. Для повышения качества подготовки учащихся к Единому государственному экзамену профильного уровня подобный анализ целесообразно проводить для всех задач с развернутым ответом, прогнозировать пути предупреждения типичных ошибок участников экзамена [1].

Эта статья посвящена анализу результатов ЕГЭ по математике учащихся Алтайского края, полученных в 2015 году при решении задания 17.

Около 40 % участников ЕГЭ профильного уровня в 2015 году приступили к решению задачи 17, однако три четверти из них получили за попытку лишь нулевой балл. Более детальные результаты представлены на рисунке 1.

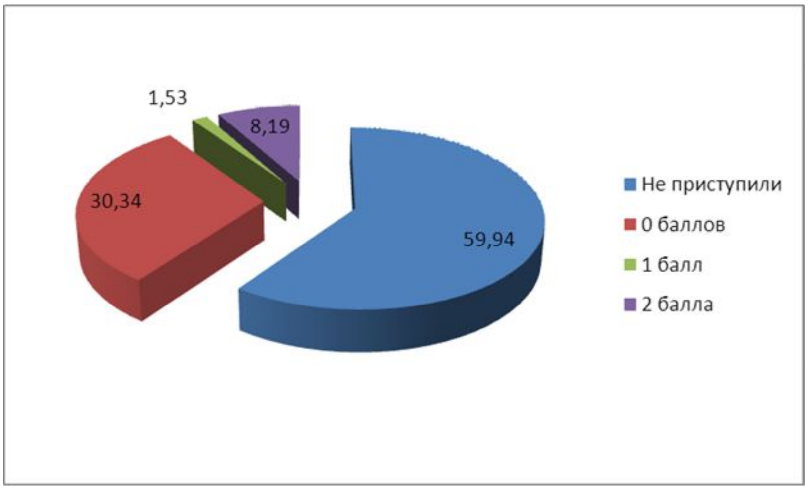


Рис. 1. Результаты выполнения задания 17 в первичных баллах

В профильном ЕГЭ 2015 года модель задачи 17 (ранее – задача С3) претерпела изменения по сравнению с прошлым годом. Вместо системы неравенств была предложена задача: решить «одиночное» неравенство.

Задача 17 (ЕГЭ профильный уровень) в 2015 году предполагала умения учащихся решать уравнения и неравенства [7, 8, 9], а именно: использовать метод введения вспомогательной переменной для решения неравенств; применять метод интервалов; владение тождественными преобразованиями рациональных выражений, а также показательных и логарифмических выражений и умения оценить равносильность этих преобразований; владение понятием области допустимых значений неравенства, системы неравенств, совокупности неравенств, в данном случае связанной со свойствами дробно-рациональной функции; знание свойств показательной и логарифмической функций; понимание смысла системы неравенств как логической операции «конъюнкции» и совокупности неравенств как логической операции «дизъюнкция» и др.

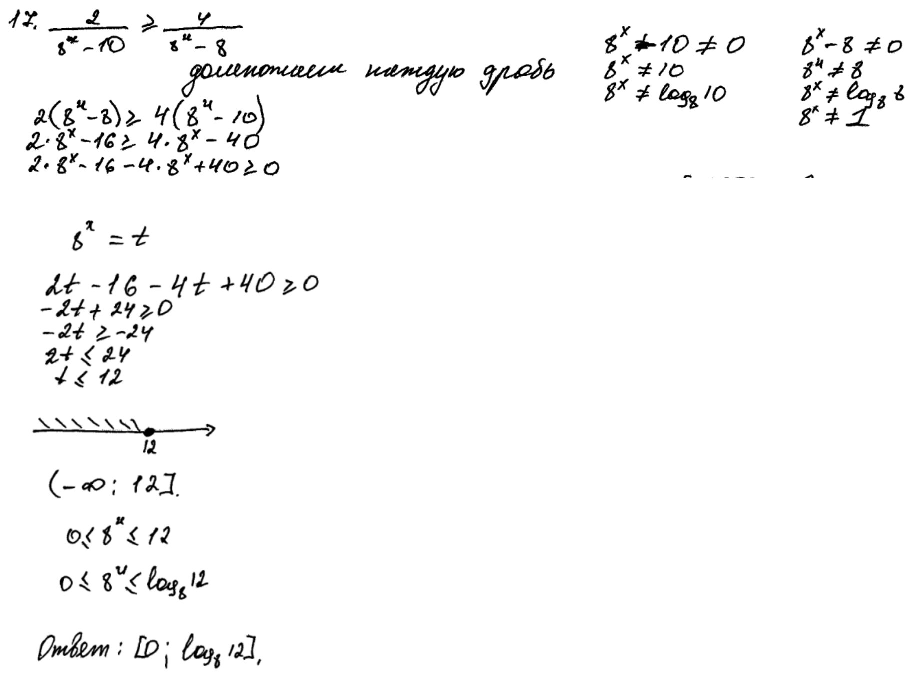
Приведем пример условия задачи 17 одного из вариантов:

«Решите неравенство: $\dfrac{2}{8^x-10} \geq \dfrac{4}{8^x-8}$».

Как следует диаграммы рис.1, процент учащихся Алтайского края, получивших положительный балл (1 или 2) за решение задачи №17 в 2015 году составляет 9,72 %, что несколько ниже нижней границы нормы (10–50 %). Рассмотрим типичные ошибки нынешнего года.

1. Самые распространённые ошибки, сделанных учащимися, приступившими к решению задачи № 17 в 2015 году, связаны с формальным перенесением методов и приёмов решения уравнений на неравенства того же типа. Это, в частности, проявилось в умножение неравенства на выражение с переменной без учёта знака этого выражения, в применении к неравенству свойства пропорции, переход от дробно-рационального неравенства к неравенству, связывающему числители («отбрасывание» знаменателя), замена на первом этапе решения неравенства уравнением. Следующие примеры иллюстрируют указанные ошибки.

Пример 1.



17. $\dfrac{2}{8^x-10} \geq \dfrac{4}{8^x-8}$

домножаем каждую дробь

$2(8^x-8) \geq 4(8^x-10)$

$2\cdot 8^x-16 \geq 4\cdot 8^x-40$

$2\cdot 8^x-16-4\cdot 8^x+40 \geq 0$

$8^x-10 \neq 0$ $\quad 8^x \neq 10$ $\quad 8^x \neq \log_8 10$

$8^x-8 \neq 0$ $\quad 8^x \neq 8$ $\quad 8^x \neq \log_8 8$ $\quad 8^x \neq 1$

$8^x = t$

$2t-16-4t+40 \geq 0$

$-2t+24 \geq 0$

$-2t \geq -24$

$2t \leq 24$

$t \leq 12$

12

$(-\infty; 12]$.

$0 \leq 8^x \leq 12$

$0 \leq 8^x \leq \log_8 12$

Ответ: $[0; \log_8 12]$.

Рис. 2. Умножение неравенства на выражение с переменной

Комментарии: Автором этого решения, представленного на рис. 2, применено неравносильное преобразование, а именно: умножение неравенства на выражение с переменной, знак которого зависит от значения этой переменной. Согласно критериям, оценка – 0 баллов. Заметим также, что в последнем переходе, видимо, ученик допустил описку, вместо x записав 8^x. Учитывая эту погрешность, можно констатировать, что автор этого решения не знает также, что неравенство $8^x \geq 0$ верно при всех значениях переменной. Заметим, что последнее замечание нередко встречалось и в других работах.

Пример 2.

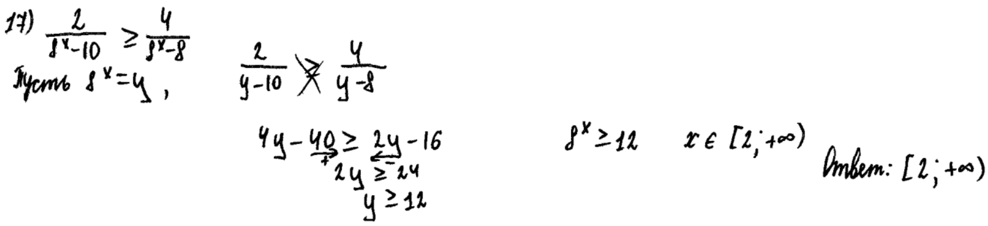
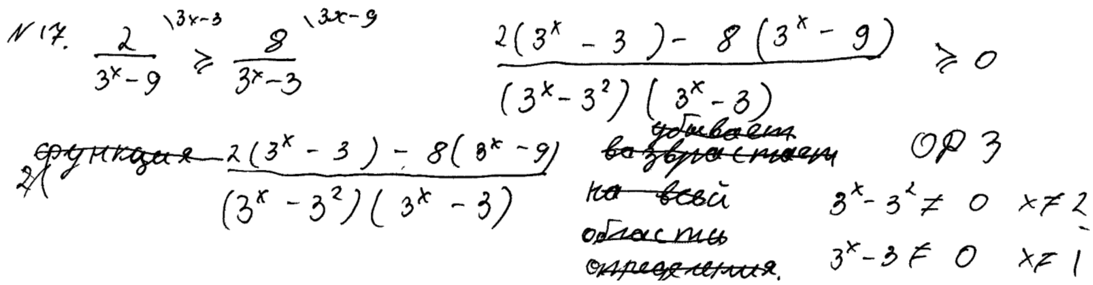


Рис. 3. Применение к неравенству свойств пропорции

Комментарии: Автор этого решения неправомерно применил для неравенства свойство пропорции («крест-накрест»: произведения крайних и средних членов пропорции равны), что проиллюстрировал соответствующим знаком. Имеется также ошибка вычислительного характера в последнем переходе решения. Оценка, согласно критериям, 0 баллов.

Пример 3.



$$\frac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-3^2)(3^x-3)} \geqslant 0$$

$$(3^x-3)-\overset{4}{\cancel{8}}(3^x-9) \geqslant 0$$

$$3^x-3 \geqslant 4\cdot 3^x-36$$

$$33 \geqslant 4\cdot 3^x-3^x$$

$$33 \geqslant \cancel{4}3\cdot 3^x$$

$$11 \geqslant 3^x$$

$$\log_3 11 \geqslant x$$

Ответ: $x \in \cancel{(-\infty}\ (-\infty; 1)\cup(2; \log_3 11]$

Рис. 4. «Отбрасывание» знаменателя

Комментарии: нарушена равносильность в определённый момент решения. Можно предположить, что ученик использовал в общем случае неверное утверждение о том, что «дробь неотрицательна при неотрицательном числителе». Согласно критериям, 0 баллов.

Заметим также, что в этой работе наблюдается ещё одна достаточно распространённая ошибка: аналитическое и графическое представления ответа не соответствуют друг другу, описывая различные числовые множества.

2. Учащиеся, приступившие к решению задачи №17 и получившие ненулевой балл за эту задачу, применяли в основном метод интервалов, предварительно введя вспомогательную переменную.

С применением метода интервалов и введением вспомогательной переменной связан ряд достаточно распространённых ошибок. Отдельные из них, согласно критериям, могут расцениваться как вычислительные (например, ошибка при определении знака на одном из промежутков), другие – принципиальные, связанные с пропуском шагов алгоритма или неверным их выполнением, не могут быть оценены ненулевым баллом. Приведём примеры.

Пример 4.

№17. $\frac{3}{6^x-6} \geq \frac{4}{6^x-5}$ ОДЗ: $\begin{cases}6^x-6\neq 0\\ 6^x-5\neq 0\end{cases};\ \begin{cases}6^x\neq 6\\ 6^x\neq 5\end{cases};\ \begin{cases}x\neq 1\\ x\neq \log_6 5\end{cases}$

$\frac{3}{6^x-6}^{\backslash 6^x-5} - \frac{4}{6^x-5}^{\backslash 6^x-6} \geq 0$

$\frac{3(6^x-5)-4(6^x-6)}{(6^x-6)(6^x-5)} \geq 0$

Пусть $6^x = t$, тогда

$\frac{3(t-5)-4(t-6)}{(t-6)(t-5)} \geq 0$

$\frac{3t-15-4t+24}{t^2-5t-6t+30} \geq 0$

$\frac{-t+9}{t^2-11t+30} \geq 0$

$f(x) = \frac{-t+9}{t^2-11t+30}$ $D(f)$: $t^2-11t+30\neq 0$

$D=121-120\neq 1$

$t_1\neq \frac{11+1}{2}=\frac{12}{2}\neq 6$

$t_2\neq \frac{11-1}{2}=\frac{10}{2}\neq 5$

Н.ф.: $-t+9=0$

$-t=-9$

$t=9$

$+ \quad + \quad + \quad -$

$5 \quad 6 \quad 9 \quad t$

$t\in(-\infty;5)\cup(5;6)\cup(6;9]$.

$\left[\begin{array}{l} t<5\\ 5<t<6\\ 6<t\leq 9\end{array}\right.$ (см. на др. стороне).

1) $6^x<5$
$\log_6 6^x<\log_6 5$
$x<\log_6 5$

2) $5<6^x<6$
$\log_6 5<\log_6 6^x<\log_6 6$
$\log_6 5<x<1$

3) $6<6^x\leq 9$
$\log_6 6<\log_6 6^x\leq\log_6 9$
$1<x\leq\log_6 9$

$\log_6 5<\log_6 6<\log_6 9$

с ОДЗ:

$\log_6 6$

$\log_6 5 \quad 1 \quad \log_6 9 \quad x$

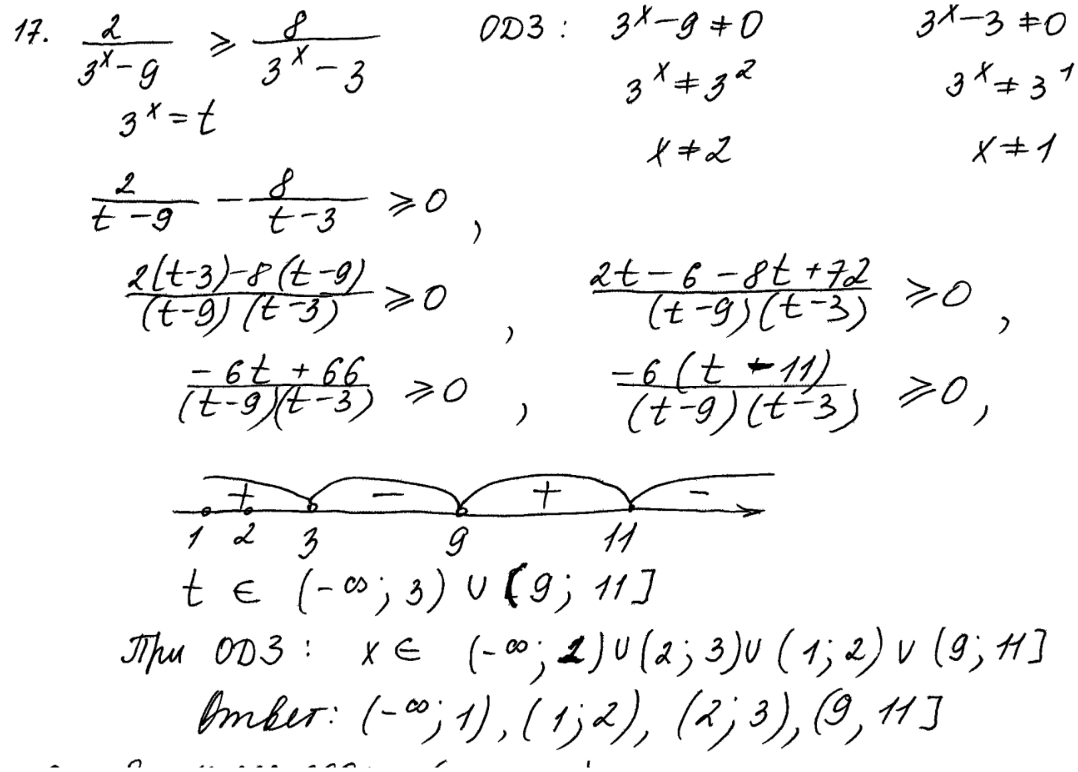
$x\in(-\infty;\log_6 5)\cup(\log_6 5;1)\cup(1;\log_6 9]$.

Ответ: $(-\infty;\log_6 5);\ (\log_6 5;1);\ (1;\log_6 9]$.

Рис. 5. Ошибка в определении знака на интервале

Комментарии: Ошибка в определении знака на одном из интервалов вполне может быть признана вычислительной. Учащийся довёл решение до конца, продемонстрировав в целом владение методом замены переменных и методом интервалов. Согласно критериям, 1 балл.

Пример 5.



17. $\frac{2}{3^x-9} \geqslant \frac{8}{3^x-3}$ ОДЗ: $3^x-9\neq0$ $3^x-3\neq0$

$3^x=t$ $3^x\neq3^2$ $3^x\neq3^1$

$x\neq2$ $x\neq1$

$\frac{2}{t-9}-\frac{8}{t-3}\geqslant0$,

$\frac{2(t-3)-8(t-9)}{(t-9)(t-3)}\geqslant0$, $\frac{2t-6-8t+72}{(t-9)(t-3)}\geqslant0$,

$\frac{-6t+66}{(t-9)(t-3)}\geqslant0$, $\frac{-6(t-11)}{(t-9)(t-3)}\geqslant0$,

$t\in(-\infty;3)\cup[9;11]$

При ОДЗ: $x\in(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(1;2)\cup(9;11]$

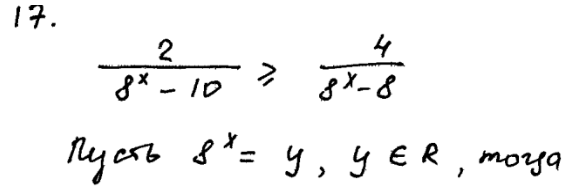
Ответ: $(-\infty;1),(1;2),(2;3),(9,11]$

Рис. 8. Отсутствует необходимый шаг алгоритма

Комментарии: Не сделана обратная замена – необходимый шаг алгоритма. На числовой прямой отмечены значения исходной и введённой переменной. Согласно критериям, 0 баллов.

3. Отдельные учащиеся применили так называемый логический способ решения, осуществив на определённом этапе равносильный переход к совокупности двух систем. С этим способом решения неравенства связаны следующие ошибки. Это рассмотрение только одного случая положительности (отрицательности) дроби, неверное использование логической символики. Приведём примеры, иллюстрирующие вторую ошибку.

Пример 6.



17.

$\frac{2}{8^x-10}\geqslant\frac{4}{8^x-8}$

Пусть $8^x=y$, $y\in R$, тогда

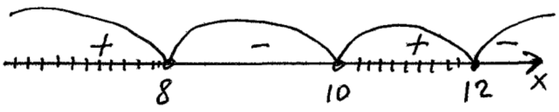
$$\frac{2}{y-10} - \frac{4}{y-8} \geq 0$$

$$\frac{2^{\backslash y-8}}{y-10} - \frac{4^{\backslash y-10}}{y-8} = 0$$

$$\frac{2y - 16 - 4y + 40}{(y-10)\,(y-8)} = 0$$

$$\frac{-2y + 24}{(y-10)(y-8)} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} -2y + 24 = 0 \\ (y-10)(y-8) \neq 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y = 12 \\ y \neq 10 \text{ или } y \neq 8 \end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l} y < 8 \\ 10 < y \leq 12 \end{array}\right.$$

Обратная замена:

$$\left\{\begin{array}{l} 8^x < 8 \\ 10 < 8^x \leq 12 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x < 1 \\ \log_8 10 < x \leq \log_8 12 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x < 1 \\ \log_8 10 < x \leq \log_8 12 \end{array}\right.$

Рис. 7. Неверное использование логической символики

Комментарии: В представленном выше решении автор многократно неверно использует логическую символику. В явном виде логические операции «конъюнкция» и «дизъюнкция» в школьном курсе математики не изучаются, не изучаются также законы формальной логики. В связи с этим, а также в связи с тем, что имеется верная последовательность всех шагов решения, работа оценена ненулевым баллом, однако, этот балл не максимальный.

4. Необходимым условием решения неравенств повышенной трудности является устойчивые умения тождественных преобразований выражений, в данном случае дробно-рациональных, показательных и логарифмических, а также умение оценить равносильность *этих преобразований. Ошибки этого типа в 2015 году при решении задания 17, к сожалению, являются распространенными.*

Таким образом, на основе анализа типичных ошибок в решениях задачи 17 участников ЕГЭ по математике в 2015 году можно констатировать следующее. Участники продемонстрировали различные методы решения неравенств предложенного типа, однако, при этом многие учащиеся получили за данную задачу нулевой балл. Многие из приступивших к решению задачи №17, очевидно, имеют не достаточно устойчивые навыки использования метода интервалов и метода введения вспомогательной переменной при решении неравенств, ошибаются при выполнении преобразований показательных выражений. Имеет смысл отрабатывать более тщательно применение метода введения вспомогательной переменной при решении неравенств, делая акцент на отличиях от уравнений, решаемых тем же способом. В частности, необходимо обращать внимание учащихся на то, что множество решений неравенства, полученного при введении вспомогательной переменной, целесообразно записать в виде одного или нескольких элементарных неравенств, в которых и возвращаться к исходной переменной. Запись же решений промежуточного неравенства в виде числовых промежутков часто не позволяет выпускникам продолжить решение.

На современном этапе развития образования единый государственный экзамен если и не является определяющим для выбора стратегии обучения, то на выбор тактики изучения отдельных тем школьного курса может влиять существенно.

Список литературы

1. Бронникова Л.М., Кисельников И.В., Тыщенко О.А. Типичные ошибки при решении задачи 15 участниками ЕГЭ по математике профильного уровня в Алтайском крае и пути их преодоления // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 2-2; URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=22100 (дата обращения: 09.10.2015).
2. Днепров Э.Д. Единый государственный экзамен: замыслы и итоги // Педагогические измерения. – 2011. – № 3. – С. 93–101.
3. Дорофеев Г.В. Математика для каждого. – Москва: Аякс, 1999.
4. Ефремова Н.Ф. Подготовка к единому государственному экзамену как педагогическая проблема // Высшее образование сегодня. – 2009. – № 3. – С. 18–22.
5. Жданова Л.А., Подстригич А.Г. Особенности реализации непрерывного математического образования в процессе подготовки обучающихся к единому

государственному экзамену // Вестник Томского государственного педагогического университета. – 2013. – № 13 (141). – С. 215-217.

6. Кисельников И.В. Методический анализ результатов Единого государственного экзамена по математике профильного уровня в 2015 году в Алтайском крае // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 5; URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=21580 (дата обращения: 10.09.2015).

7. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике в 2015 году (профильный уровень). – ФИПИ, 2014. – 3 с.

8. Кодификатор элементов содержания по МАТЕМАТИКЕ для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена в 2015 году (профильный уровень). – ФИПИ, 2014. – 6 с.

9. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2015 году единого государственного экзамена по математике (профильный уровень). – ФИПИ, 2014. – 12 с.

10. Концепция развития математического образования в РФ. http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/#ixzz3oEfKzbRt (дата обращения 11.10.2015).

11. Ященко И.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2015 года по математике / И.В. Ященко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий. – М.: ФИПИ, 2015. – 20 с.