УДК 372.851

ОБУЧЕНИЕ МЕТОДУ МОДЕЛИРОВАНИЯ СРЕДСТВАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ШКОЛЬНИКОВ

Лобанова Н.И.[1], Аммосова Н.В.[2]

[1]*МУДО «Центр внешкольной работы», Зеленокумск;*
[2]*ФГБОУ ВО «Астраханский государственный университет», Астрахань, e-mail: n_ammosova@mail.ru*

В статье рассматриваются вопросы обучения старших школьников методу математического моделирования при решении геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений. Актуальность данного исследования определяется тем, что, во-первых, дифференциальные уравнения являются продолжением одной из основных содержательных линий школьного курса математики – линии уравнений, поэтому целесообразно обучать старших школьников методам решения дифференциальных уравнений, во-вторых, геометрические задачи на использование дифференциальных уравнений имеют практическую направленность, в-третьих, недостаточностью соответствующих методических разработок и дидактических материалов. Результаты исследования имеют практическое значение для организации занятий в системе дополнительного образования старших подростков по применению методов дифференциальных уравнений. Результатом исследования стали методические рекомендации для педагогов дополнительного образования по обучению старшеклассников методам решения задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: дополнительное образование, геометрические задачи, дифференциальные уравнения, метод моделирования.

TEACHING SOLVING OF GEOMETRICAL PROBLEMS BY MEANS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE SYSTEM OF SUPPLEMENTARY EDUCATION

Lobanova N.I., Ammosova N.V.

[1]*MUDO "Center for extracurricular activities", Zelenokumsk;*
[2]*Astrakhan State University, Astrakhan, e-mail: n_ammosova@mail.ru*

The article deals with the issues of teaching senior students the method of mathematical modeling for solving geometric problems using differential equations. The relevance of this study is determined by the fact that, first of all, the differential equations are an extension of one of the main content lines of the school course of mathematics - the line of equations, therefore it is advisable to teach older students the methods of solving differential equations, secondly, the geometric problems for the use of differential equations are practically orientated, and thirdly, it is determined by the lack of appropriate methodological developments and didactic materials. The results of the study have practical importance for the organization of classes on the application of methods of differential equations in the system of supplementary education for senior students. The results of the study are methodological recommendations for teachers of supplementary education in the teaching of senior pupils of methods of solving problems that can be reduced to differential equations.

Keywords: supplementary education, geometrical problems, differential equations, modeling method.

С течением времени математика всё шире и глубже проникает во все сферы человеческой деятельности, успешно применяется в различных областях науки, техники и при решении практических задач. При этом происходит взаимообогащение многих областей науки, что в свою очередь стимулирует развитие и совершенствование самой математики, а также её основных идей и методов. Поэтому курсы математики, изучаемые в системах школьного, дополнительного и высшего образования, не могут оставаться неизменными. И в этой связи важно предусмотреть непрерывность и преемственность при изучении основных разделов математики, изучаемых в системе школьного, дополнительного и высшего образования, взаимосвязь обязательного обучения математике в общеобразовательной школе и занятий по математике в рамках дополнительного образования выступает как средство осуществления принципов непрерывности и преемственности [1].

Преемственность и последовательность в обучении позволяют разрешить противоречие между необходимостью формирования у будущих выпускников школ целостной системы математических знаний, умений, навыков и дискретным характером изучения учебного материала [2, с. 253]. Преемственность в содержании математической подготовки выступает как непрерывный процесс развертывания структурных компонентов содержания, плавный переход от одного этапа обучения к другому, постепенное усложнение содержания учебной информации, последовательная смена уровня требований к объему и глубине усвоения знаний, умений и навыков [3, с. 181]. В этом случае каждая следующая ступень образовательной системы является естественным продолжением, развитием предыдущей, что характерно при спиралевидном расположении материала, а учащиеся имеют возможность постепенно и непрерывно расширять знания по конкретной учебной проблеме, не допуская разрывов.

Цель занятий школьников по математике в дополнительном образовании состоит в расширении и углублении знаний, добытых ими во время изучения школьного курса, в развитии способностей и навыков учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой, в зарождении интереса к математике на первичном уровне, поддерживании его до познавательного уровня.

Изучение новых понятий в курсе математики, как правило, происходит на основе уже известных понятий, а решение новых задач часто сводится к уже решенным известным задачам. Математическая задача способствует формированию определённых форм мышления, необходимых для освоения окружающей нас действительности, так как изучает понятия, введённые путём абстрагирования от явлений реального мира [4]. Большую роль при изучении и усвоении новых математических абстракций играет решение практико-ориентированных задач, выступающих как стимулирующий мотив их изучения и вызывающих интерес к этим абстракциям. В связи с этим педагогу необходимо тренировать учащихся в умении анализировать задачную ситуацию, рассматривать её с разных сторон, не теряя при этом из виду целое, выделять различные аспекты и связывать их между собой, т.е. развивать соответствующие мыслительные операции [5].

Практическое применение методов теории дифференциальных уравнений в старших классах общеобразовательной школы реализуется в курсе физики, поскольку с результатами интегрирования дифференциального уравнения школьники встречаются уже в 9-м классе при рассмотрении равноускоренного движения. Анализ школьных учебников, ФГОС и пособий для учителей показывает, что в курс школьной программы входит изучение простейших дифференциальных уравнений. Полноценное изучение дифференциальных уравнений в школе проблематично как с точки зрения психологии, так и с точки зрения методики преподавания математики. Но основные определения и алгоритмы раздела обучающимся будут понятны, так как они ссылаются на понятия производной функции и ее первообразную [6]. Элементы дифференциального и интегрального исчислений, начала которых изучаются в старших классах общеобразовательной школы, тесно связаны с дифференциальными уравнениями. Поэтому целесообразность обучения старших школьников элементам теории дифференциальных уравнений и имеющийся недостаток методических разработок по данной проблеме определяют актуальность исследования.

Среди исследований, посвящённых изучению дифференциальных уравнений со старшеклассниками, отметим диссертацию Г.Е. Полехиной, в которой разработана методика решения уравнений, основанная на единстве и различии методов решения алгебраических, трансцендентных и дифференциальных уравнений, рекомендованная для внедрения в школьное образование. Ею представлен авторский факультативный курс по теме «Дифференциальные уравнения», который может быть использован в классах с углублённым изучением математики [7]. В проведённом исследовании курс дифференциальных уравнений рассматривается как завершающий этап развития линии уравнений в школе. Заметим, что диссертация Г.Е. Полехиной посвящена проблеме изучения дифференциальных уравнений лишь в классах с углублённым изучением математики, но не рассматривает проблему изучения дифференциальных уравнений в общеобразовательной школе, и тем более в системе дополнительного образования, не останавливается подробно на решении геометрических задач методом дифференциальных уравнений.

Таким образом, исследование проблемы ознакомления старшеклассников с дифференциальными уравнениями и методами решения задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, в условиях реализации ФГОС является актуальным. Имеющиеся научно-методические исследования проблемы не охватывают всего широкого спектра вопросов. Например, в них не исследуются вопросы обучения школьников методу математического моделирования – одному из основных в математике, не рассматривается обучение школьников решению геометрических задач посредством дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования.

Исследование проблемы проводилось в несколько этапов. На первом этапе определялось современное состояние проблемы обучения старших школьников элементам теории дифференциальных уравнений и решению задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, в том числе в системе дополнительного образования, выяснялись возрастные особенности старших школьников. На втором этапе – разрабатывалось методическое сопровождение учебной деятельности старших подростков, направленное на обучение элементам теории дифференциальных уравнений и методу математического моделирования на примере геометрических задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям. На третьем этапе проводилась работа на базе Центра внешкольной работы, СОШ № 12. г. Зеленокумска Ставропольского края России по обучению школьников методу математического моделирования при решении геометрических задач средствами дифференциальных уравнений, обрабатывались результаты опытно-экспериментальной работы.

С целью обучения школьников в системе дополнительного образования решению задач с помощью дифференциальных уравнений необходимо ввести понятие дифференциального уравнения. Мотивации старших подростков к изучению предлагаемого материала способствуют заранее подготовленные с помощью учителя выступления обучающихся, которые покажут на примерах, что в различных областях науки (естествознании, медицине, биологии и других), а также в технике и механике часто рассматриваются задачи, решение которых сводится к одному или нескольким уравнениям, содержащим, кроме переменных, искомых функций, еще и производные этих искомых функций. Уравнения такого типа называют дифференциальными. Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального процесса (явления), называется дифференциальной моделью этого процесса (явления). Мы будем рассматривать лишь модели, описываемые так называемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями [8].

Опираясь на знание о решении алгебраического уравнения, учащиеся совместно с учителем выводят понятие решения дифференциального уравнения как функции, которая это уравнение обращает в верное равенство. Важно отметить, что теория дифференциальных уравнений является непосредственным развитием и углублением дифференциального и интегрального исчислений. Далее целесообразно рассмотреть несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Важно развить у обучающихся не только умение составлять дифференциальное уравнение, описывающее реальный процесс, но обучить способам решения некоторых классов дифференциальных уравнений (с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные дифференциальные уравнения, уравнение Бернулли). Решение любой задачи, сводящейся к дифференциальному уравнению, состоит из двух этапов: творческого (составление дифференциального уравнения) и технического (решение дифференциального уравнения).

На занятиях необходимо применять историко-математический материал. Можно предложить ученикам подготовить выступления, посвящённые истории развития теории дифференциальных уравнений. Благодаря этому происходит знакомство с именами, биографиями, научными достижениями и жизненными путями конкретных исторических личностей – математиков.

Решения первых задач, приводящие к дифференциальным уравнениям, встречаются уже в XVII веке. К ним относится исследование Р. Декарта плоской кривой с применением свойств касательной после открытия в оптике закона преломления света. Сам термин «дифференциальные уравнения» впервые употребил Лейбниц в письме к Ньютону (1676), а затем он появился и в печати (с 1684). Во многих задачах геометрической оптики, геодезии, картографии и других областей естествознания возникает необходимость нахождения кривых по заданным свойствам проведённых к ним касательным. Как правило, такие геометрические задачи решаются с помощью дифференциальных уравнений, составление которых обычно связано с использованием геометрического смысла производной (углового коэффициента касательной, то есть тангенса угла, образованного между касательной к кривой и положительным направлением оси Ox).

Общая схема решения таких задач формулируется вместе с учащимися после решения первой задачи. Она состоит из этапов:

1) сделать чертеж исходя из условий задачи, обозначив через $y = f(x)$ искомую кривую, а через $M\,(x, y)$ – произвольную точку этой кривой;

2) выразить все входящие в задачу величины через x, y и y' и, используя условия задачи, записать зависимость между ними в виде уравнения: $\mathrm{F}(x, y, y' = 0)$, т.е. составляется модель. Ученики усваивают один из основных методов математики – метод математического моделирования. При этом в большинстве случаев используется обычно геометрический смысл производной $y' = tg\alpha$, где α есть угол, образованный касательной к кривой в точке $M\,(x, y)$ с положительным направлением оси Ox;

3) решить полученное дифференциальное уравнение одним из методов, с которыми ознакомлены учащиеся, т.е. ищется кривая по свойству ее касательной, общему для всех точек этой кривой, при этом наибольший эффект, как правило, достигается, если использовать уравнение касательной в точке М (x, y): $Y - y = y' \cdot (X - x)$, где X, Y – текущие координаты касательной;

4) сделать вывод.

Рассмотрим примеры решения геометрических задач на нахождение кривых, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в n раз меньшую абсциссы точки касания ($n > 1$).

Решение. Решаем задачу с обучающимися в соответствии с выделенными этапами.

1. Сделаем рисунок (рис. 1).

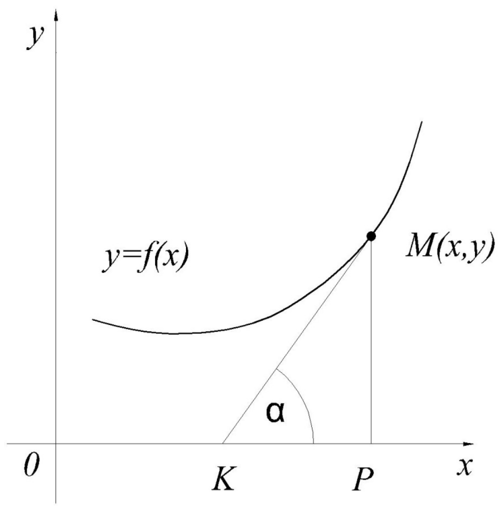


Рис. 1. График возрастающей функции

Пусть $y = f(x)$ есть уравнение одной из искомых кривых и $M(x, y)$ – произвольная точка, лежащая на ней.

2. Обозначим через α угол, образованный касательной в точке $M(x, y)$ с положительным направлением оси Ox. Из прямоугольного треугольника *KPM* получаем:

$$tg\alpha = \frac{|MP|}{|KP|} \ . \tag{1.1}$$

Далее обучающиеся выражают величины, входящие в (1.1), через x, y и y'. Имеем (рис. 1): $|OP| = x$, $|MP| = y$, $tg\alpha = y'$ (в силу геометрического смысла производной) и $|KP| = \frac{n-1}{n} \cdot x$, так как по условию задачи $|OK| = \frac{1}{n} \cdot x$. Подставляя в (1.1), обучающиеся получают дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{y}{x}. \tag{1.2}$$

3. Установив тип дифференциального уравнения, обучающиеся разделяют переменные и интегрируют; из (1.2) имеем:

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{n}{n-1} \int \frac{dx}{x},$$

откуда получают: $y = C \cdot x^{\frac{n}{n-1}}$ – общее решение дифференциального уравнения (1.2).

4. Далее делают вывод и записывают ответ.

Ответ: $y = C \cdot x^{\frac{n}{n-1}}$, C – произвольная постоянная.

Полезно рассмотреть случай, если в задаче 1 точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в 2 раза меньшую абсциссы точки касания, при этом в результате получим $y = C \cdot x^2$ – семейство парабол.

В связи с решением задачи 1 у учащихся естественно может возникнуть вопрос: а что если точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в n раз большую (а не меньшую) абсциссы точки касания? Чтобы ответить на этот вопрос, предлагаем рассмотреть для простоты случай $n = 2$. А именно, решим следующую задачу.

Задача 2. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в 2 раза большую абсциссы точки касания.

Решение. 1. Сделаем рисунок (рис. 2).

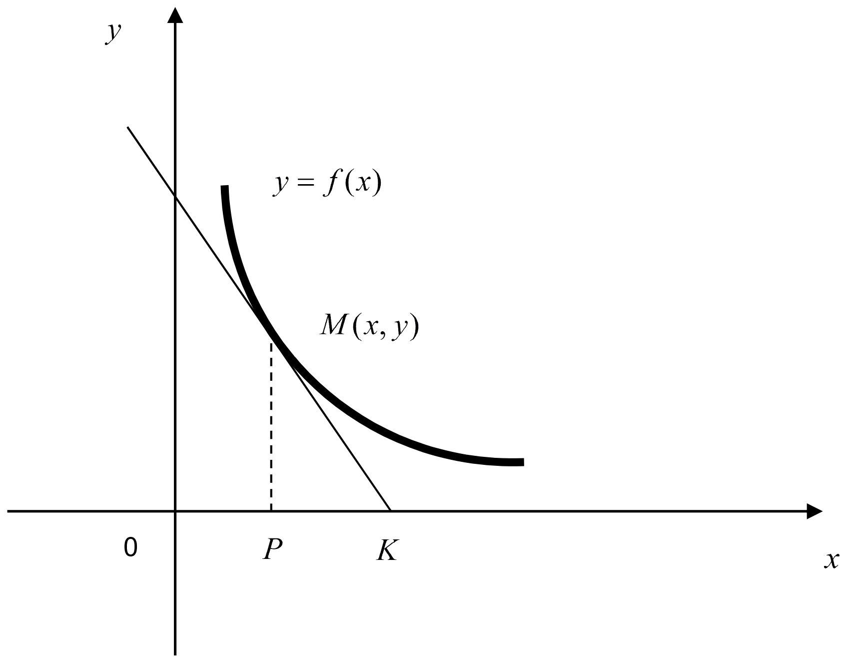


Рис. 2. График убывающей функции

Пусть $y = f(x)$ есть уравнение одной из искомых кривых и $M(x, y)$ – произвольная точка, лежащая на ней.

2. Обозначим через α угол, образованный касательной в точке $M(x, y)$ с положительным направлением оси Ox. Тогда $\angle MKP = \pi - \alpha$. Из прямоугольного треугольника KPM получаем:

$$tg(\pi - \alpha) = \frac{|MP|}{|PK|} . \tag{2.1}$$

Выразим величины, входящие в (2.1), через x, y и y'. Имеем (рис. 2): $|OP| = x$, $|MP| = y$, $tg\alpha = y'$ (в силу геометрического смысла производной) и $|PK| = x$, так как по условию задачи $|OK| = 2x$. Подставляя в (2.1), с учетом того, что по формулам приведения $tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$, получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$-y' = \frac{y}{x}. \tag{2.2}$$

3. Обучающиеся определяют тип дифференциального уравнения, разделяют переменные и интегрируют, т. е. из (2.2) получают:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

откуда $y = \dfrac{C}{x}$ – общее решение дифференциального уравнения (2.2).

4. Ответ: $y = \dfrac{C}{x}$ – семейство гипербол, где C – произвольная постоянная.

Следует обратить внимание обучающихся на то, что при $n = \dfrac{1}{2}$ ответы задач 1 и 2 совпадают.

Кроме того, проводя аналогию с решением задачи 1, обучающиеся замечают, что задача 2 допускает обобщение на случай, когда точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в n раз большую абсциссы точки касания.

Учащиеся часто задают вопрос: для чего нужна математика, где она применяется, какая от неё польза? И они хотят услышать не абстрактные ответы о том, что она применяется в астрономии, физике, химии, биологии, медицине и т.д., а ознакомиться с конкретными примерами применений, причем желательно относящимися к явлениям, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни. На наш взгляд, неподдельный интерес у учащихся может вызвать пример, связанный со спутниковыми антеннами, локаторами (радиолокационными станциями или радарами). При этом можно успешно использовать информационные-коммуникационные технологии (ИКТ) для демонстрации презентаций и видеофильмов [9].

Как известно, спутниковая антенна (*антенна спутниковой связи*) – это антенна, используемая для приёма и (или) передачи радиосигналов между наземными станциями и искусственными спутниками Земли. В спутниковой связи используются различные типы антенн, причем самый известный из них учащимся тип – это **зеркальные** параболические антенны (*«спутниковые тарелки»*), массово применяемые в настоящее время для приёма спутникового ТВ-вещания и в спутниковой связи. После демонстрации презентации обращается внимание учащихся, что для приёма и передачи радиосигналов необходимо, чтобы они не рассеивались (были параллельны). Рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Какова должна быть форма спутниковой тарелки, чтобы отраженные радиосигналы были параллельны?

Решение. 1. Сделаем рисунок. Поместим источник радиосигналов в начале координат $O(0,0)$ плоскости xOy и найдем уравнение линии Γ пересечения поверхности тарелки этой плоскостью, считая ось Ox осью симметрии. Пусть $P(x, y) \in \Gamma$ – любая точка. Проведем через эту точку касательную к кривой Γ (рис. 3).

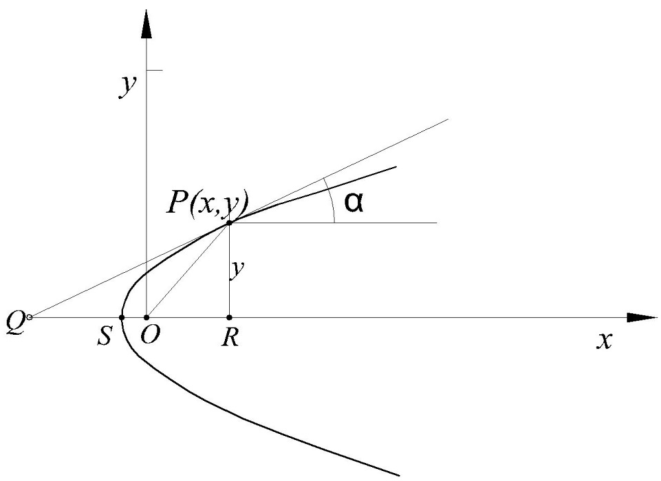


Рис. 3. График линии Γ *(парабола)*

2. Так как угол падения α равен углу отражения, то $\angle OPQ = \alpha$ и $\angle PQO = \alpha$. Значит, ΔOPQ равнобедренный, т.е. $|OP| = |OQ| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (по теореме Пифагора).

Из прямоугольного треугольника ΔPQR получаем: $tg\alpha = \dfrac{|PR|}{|QR|}$. Выразим величины, входящие в это равенство, через x, y и y'. Так как (рис. 3): $PR = y$, а $OR = x$, то в силу геометрического смысла производной имеем

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \frac{|PR|}{|QR|} = \frac{y}{|QO| + |OR|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \frac{y \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)}{y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y},$$

откуда $y \cdot y' = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ или

$$\frac{x + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1.$$

3. Замечая, что первообразной левой части является $\sqrt{x^2+y^2}$, а правой части x, обучающиеся, интегрируя, получают $\sqrt{x^2+y^2}=x+C$ или

$$y^2=2Cx+C^2, \qquad (3.1)$$

где C есть произвольная постоянная.

Из равенства (3.1) следует, что линия Γ есть парабола. Значит, спутниковая тарелка имеет форму параболоида, получающегося в результате вращения линии Γ вокруг оси Ox.

4. Далее делают вывод и записывают ответ.

Ответ. Спутниковая тарелка имеет форму параболоида.

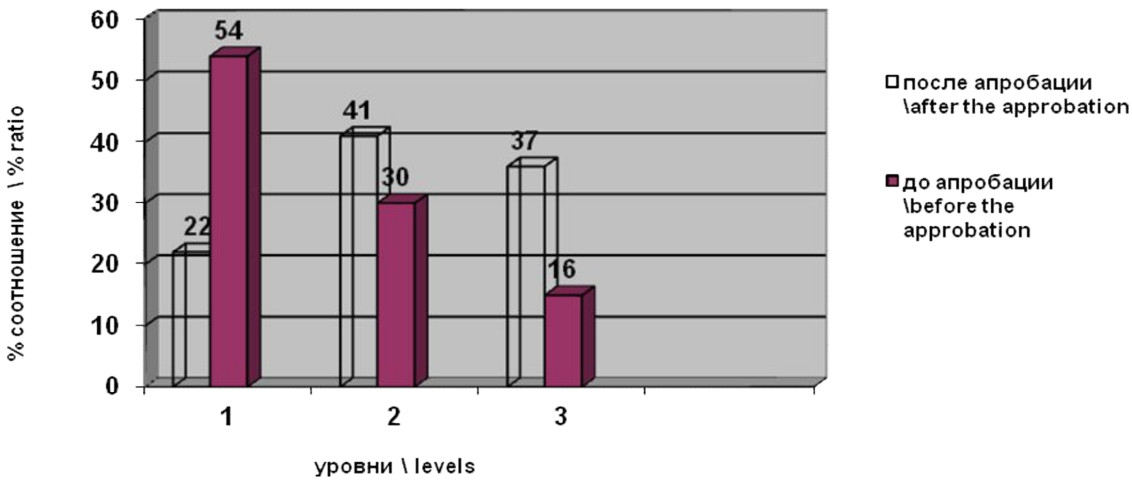
Далее учащимся можно предложить найти вершину и фокус параболы Γ.

На занятиях по математике проводим беседу с учащимися по книге А.Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина». Ставится проблема: как правильнее назвать это произведение «гиперболоид» или «параболоид» инженера Гарина?

Для закрепления умений решения геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений обращаем внимание учащихся на этапы метода моделирования. Не целесообразно сразу в большом количестве решать задачи. Важно, чтобы старшеклассникам осознали суть метода моделирования. Следуя психологическим исследованиям, согласно которым к знаниям необходимо систематически обращаться, чтобы они становились прочнее, задачи распределяем во времени и предлагаем для самостоятельного решения.

Описанная методика обучения старших подростков методу моделирования при решении геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений была апробирована в группах дополнительного образования на базе СОШ № 12, в Центре внешкольной работы г. Зеленокумска. Следуя идеям работы [10], проводилось исследование по выявлению уровня сформированности умения применять метод моделирования при решении геометрических задач средствами дифференциальных уравнений.

Полученные результаты представлены на диаграмме.



Уровни умений старших школьников решать задачи на геометрический смысл производной: 1 - низкий, 2 – средний, 3 - высокий

На диаграмме видно, что до апробации старшеклассников с низким уровнем знаний было более чем в два раза больше, чем после апробации, а с высоким уровнем – более чем в два раза меньше, чем после апробации описанной методики. Количество обучающихся среднего уровня увеличилось на 11%. Тем самым показано, что после апробации описанной методики старших подростков, достигших среднего и высокого уровня знаний, стало значительно больше.

Овладев методикой решения рассмотренных выше задач и подобных им, педагоги дополнительного образования смогут грамотно обучить старших школьников решению дифференциальных уравнений и решению задач с помощью дифференциальных уравнений. При решении элементарных дифференциальных уравнений и задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, у старшеклассников, как у будущих студентов, сформировалось чёткое представление о производной, как о функции, выражающей зависимость между конкретными физическими величинами. В обучении физико-математическим специальностям интегральное исчисление и дифференциальные уравнения принадлежат к одним из базовых курсов. Тем самым выпускники школ готовятся к успешному продолжению обучения в высших учебных заведениях.

Список литературы

1. Аммосова Н.В., Краснова Г.Г. Реализация преемственности в обучении математике в основной и старшей школе (на примере изучения уравнений) // Сибирский педагогический журнал. – 2012. – № 3. – С. 252–256.

2. Асланов Р.М. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в педагогическом вузе: автореф. дис. … д-ра. пед. наук: 13.00.02. - М., 1997. – 36 с.

3. Лобанова Н.И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования // Мир науки: интернет-журнал. – 2016. – Т. 4, № 6. – URL: http://mir-nauki.com/PDF/32PDMN616.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

4. Izvorska D., Kovalenko B.B., Ammosova N.V. Использование мыслительных операций как базы синергетического подхода при обучении математике // Education, science and economics at universities, integration to international educational area: International conference. — Plock, Poland, 2008. – P. 246–250.

5. Дорофеев А.В. Проектирование математической учебной деятельности в профессиональном образовании будущего педагога // Образование и наука. – 2005. – № 2. – С. 82-90.

6. Милованов Н.Ю. Дифференциальные уравнения в школьном курсе математики // Актуальные проблемы обучения математике, физике и информатике в школе и вузе: сб. ст. V Межрег. науч.-практ. конф. учителей / под общ. ред. д-ра пед. наук, проф. М.А. Родионова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2014. – 360 с.

7. Полехина Г.Е. Дифференциальные уравнения как завершающий этап развития методической линии уравнений в школе: автореферат дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1996. – С. 16.: ил. РГБ ОД, 9 97-5/474-6.

8. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. - М.: КД Либроком, 2012. - 208 с.

9. Ларионова О.Г., Дорофеев А.В. Методические особенности проектирования лекции-презентации // Современное образование. – 2016. – № 3. – С. 51-58.

10. Dorofeev A.V., Latypova A.F. The vector model of competence diagnostics // Mediterranean Journal of Social Sciences. – 2015. – Т. 6, № 4. – С. 11-21.