

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Васильченко С.Ш.¹, Митрохина С.В.²

¹МБОУ «Центр образования № 40», Тула, e-mail: sofya_karimova@mail.ru;

²ФГБОУ ВО «Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого», Тула, e-mail: svetamitr@yandex.ru

В данной статье рассматривается проблема развития пространственных представлений учащихся 5 классов в процессе обучения математике. На основании экспериментального исследования, проведенного авторами статьи, установлено, что у учащихся экспериментальной группы слабо развиты топологические пространственные представления, поэтому предложено включение в школьный курс математики топологических задач, например на занятиях математического кружка. Проведенный анализ психологической литературы позволил сформулировать определение пространственных представлений школьников. Средством развития пространственных представлений учащихся выступают топологические задачи. Авторами описывается организация работы учащихся по решению топологических задач, при этом особое внимание уделяется этапу моделирования как необходимому компоненту для более глубокого понимания задачи и развития пространственных представлений. Для развития пространственных представлений в процессе решения топологических задач авторами используется схема, предложенная В.А. Гусевым. Представлена технология обучения решению топологических задач из раздела «Узлы» в 5 классе с подробным описанием этапа моделирования. Описана организация деятельности учащихся на этапе моделирования, сформулированы выводы по каждой задаче, определены предметные и метапредметные результаты.

Ключевые слова: обучение математике, учащийся, пространственные представления, топологическая задача, моделирование.

MODELING IN THE PROCESS OF SOLVING THE TOPOLOGICAL PROBLEMS

Vasilchenko S.S.¹, Mitrokhina S.V.²

¹Center of education № 40, Tula, e-mail: sofya_karimova@mail.ru;

²Tula State Pedagogical University named after Leo Tolstoy, Tula, e-mail: svetamitr@yandex.ru

The article deals with the issue of development of the fifth grade pupils' spatial reasoning in the course of Mathematics teaching. On the basis of the study undertaken by the author of the article it was stated that the level of development of the fifth grade pupils' topological spatial reasoning is rather low. Therefore, the author proposes that the topological tasks should be included in the school course in Mathematics, in order that the level of spatial reasoning development might be raised. In the author's opinion, the work on the topological tasks should be built on V.A. Gusev's scheme of formation of the spatial view on geometric objects. In consideration of the topological tasks, the author pays special attention to compliance with the working sequence; singles out modelling as the stage required for further understanding of the task as well as spatial reasoning development. Also the tasks include measuring by eye with further check by means of measuring tools. The author believes that the fusionism is the key idea for organization of the effective development of the fifth grade pupils' spatial reasoning in the course of "Lines" unit studying. Topological objects (so called "topological knots") make it possible for the pupils to consider various arrangements of lines in space and find similarities/differences to the arrangement of lines on a plane.

Keywords: training in mathematics, pupil, spatial representations, topological task, modeling.

Проблема ориентации человека в пространстве достаточно многогранна. Она включает как представления о размерах, форме предметов, так и способность различать расположение предметов в пространстве, понимание различных пространственных отношений. Пространственные представления возникают очень рано, качество их развития обусловлено взаимодействием с внешней средой, а также наследственными факторами. Развитие пространственных представлений оказывает существенное влияние на успешность обучения различным предметам.

Подойдя к школьному возрасту, дети имеют очень разный уровень сформированности пространственных представлений, поэтому для организации качественного обучения необходимы проведение диагностического исследования и на основании полученных результатов подбор заданий на развитие пространственных представлений для уроков математики.

Существует множество определений термина «пространственные представления» в различных словарях и научных изданиях. Исходя из определений, данных в «Большом психологическом словаре» под редакцией Б.Г. Мещерякова [1], а также в учебнике А.Г. Маклакова «Общая психология» [2], мы сформулировали следующее определение: пространственные представления – это форма представлений, отражающих пространственные отношения предметов (величину, форму, месторасположение, движение и т.д.), имеющих определенные уровни развития, изменяющиеся в процессе обучения и являющиеся необходимым элементом пространственного мышления школьников.

Деятельность по оперированию пространственными образами в процессе решения задач – формирует пространственное мышление, развитие которого в свою очередь необходимо для успешного обучения.

Последовательность развития пространственных представлений строится от топологических к проективным и от них к метрическим, поэтому мы считаем необходимым включение топологических задач в учебный материал. Наши исследования уровня развития пространственных представлений учащихся 5 классов показали слабое развитие топологических представлений: задачи по отделению фигуры от фона, нахождению пересечения фигур вызывали большие трудности.

В структуре геометрической подготовки учащихся 5-6 классов конструктивную геометрическую деятельность можно считать ведущей, поскольку в процессе её формирования так или иначе задействуются все остальные её компоненты (по Г.Д. Глейзеру): интуитивный, пространственный, метрический, логический и символический [3, с. 3].

В.А. Гусев предлагает следующую схему формирования пространственных представлений о геометрическом объекте: «формирование единичных пространственных образов в практической деятельности на конкретных моделях или с привлечением знакомых учащимся образов (входящих в их субъектный опыт), адекватных понятию соответствующего геометрического объекта. Формирование обобщенных пространственных образов геометрических объектов при нахождении моделей изучаемых геометрических объектов на основе: а) их восприятия, б) образов памяти. Первичное уточнение содержания понятия соответствующего геометрического объекта при рассмотрении «неожидаемых» или

непривычных ситуаций через отнесение его свойств к существенным или несущественным свойствам понятия. Выбор учеником собственной оптимальной модели, адекватной понятию соответствующего геометрического объекта, на основе осмысления собственного опыта и его интеграции с общественно-историческим. Проверка сформированности представлений о геометрическом объекте...» [4, с. 188]. При обучении пятиклассников решению топологических задач мы придерживаемся данной схемы.

Организация деятельности учащихся по решению задач происходит с учётом последовательности формирования пространственных представлений: любой объект первоначально воспринимается нами с помощью органов чувств, т.е. через ощущения и восприятие у нас образуется образ предмета. При этом сначала возникают образы в сознании в результате отражения пространственных свойств и отношений ранее воспринятых предметов – представления памяти. Далее посредством деятельности представления на основе представлений памяти возникают представления воображения – новые образы, формируемые в результате трансформации представлений памяти. В результате формируется пространственный образ объекта. Далее формируются топологические представления об объекте – это первая ступень формирования пространственных представлений. Затем добавляются представления о величине, движении, месторасположении объекта, т.е. формируются пространственные представления, являющиеся необходимой составляющей пространственного мышления.

Г.Д. Глейзер выделяет следующие основные пути обогащения и совершенствования пространственных представлений учащихся при обучении геометрии:

- по возможности изучать плоские фигуры расположенными различным образом в пространстве;
- систематически привлекать неплоские пространственные образы при решении задач планиметрического характера;
- при изучении различных геометрических множеств точек плоскости необходимо выяснить с учащимися аналогичные множества точек трехмерного пространства, используя их опыт и интуицию;
- систематически привлекать учащихся к выполнению чертежей, изготовлению разверток и моделей геометрической фигуры. Главное, чтобы учащийся сумел правильно выполнить необходимые расчёты и разметочные построения, правильно воссоздал образ предмета по его изображениям;
- систематизировать разрозненные стереометрические сведения учащихся, приобретенные ими в процессе жизненной практики (расположение прямых и плоскостей в пространстве, определение правильных многогранников и фигур вращения) [3, с. 55].

С.Б. Верченко отмечает важность практических работ для развития пространственных представлений, «так как в процессе решения задач на построение, моделирование и др. у учащихся развиваются пространственные представления, т.е. умение отчетливо представлять себе ту или иную геометрическую фигуру, умение мысленно выполнять конструктивные операции над элементами фигуры» [5, с. 50-51].

В современных учебниках по математике для 5 класса в главе «Линии» учащимся рассказывается о множестве линий, которые нас окружают, однако все эти линии рассматриваются в виде плоских рисунков, хотя большинство линий, окружающих человека, находится в трехмерном пространстве в виде различных кривых. На наш взгляд, содержание раздела «Линии» существенно обогатится, если к имеющимся задачам добавить изготовление простых моделей из нитей, спичек, проволоки, бумаги и другого подручного материала. Конечно, на изготовление даже простейших моделей затрачивается определенное время урока, однако моделирование имеет большой потенциал для развития пространственных представлений. Содержание топологических задач позволяет рассматривать линии на плоскости и в пространстве одновременно, что является одним из условий развития пространственных представлений учащихся.

При изучении раздела «Линии» в 5 классе можно использовать задачи из раздела топологии «Узлы». Покажем технологию обучения решению задач из этого раздела с целью развития пространственных представлений, особое внимание при этом будем уделять этапу моделирования. Веревоочные узлы являются простыми и в то же время очень разносторонними моделями кривых. Создание моделей узлов из веревки позволяет буквально «своими руками» проверять утверждения и решать задачи.

Будем считать, что концы каждого узла соединены друг с другом, после такой операции привычный для нас веревочный узел с двумя свободными концами превратится в плетеное веревочное кольцо. Завязывание и развязывание узлов – повседневная деятельность человека: бантики, двойной узел и т.д. Учащимся знакомо понятие «морской узел» из литературы, поэтому им будет интересно самостоятельно завязать один из вариантов морского узла – топовый узел (рис. 2Е).

Работу над каждой задачей будем начинать с создания модели, что, как мы уже отмечали, является необходимым условием для эффективного развития пространственных представлений учащихся.

Рассмотрим особенности процесса восприятия, согласно исследованиям В.А. Гусева, первичные образы формируются в процессе восприятия. «Организуя его, следует учитывать, что зрительное восприятие формы вторично по отношению к осязательному. При зрительном восприятии трехмерного объекта информация поступает не от всех частей

модели, невидимые элементы достраиваются в представлении на основе имеющегося у наблюдателя опыта, а значит, их достоверность гипотетична, поэтому возникает необходимость рассмотрения предмета с разных сторон. При зрительном восприятии изображения трехмерного объекта на плоской поверхности опираемся на те представления, которые уже сформированы. Но если их нет или они неверны, то у ребенка может создаться образ, не адекватный изучаемому объекту. Поэтому для создания у ученика верного представления о форме предмета следует организовать работу с моделями фигур, включающую в процесс познания кинестетические ощущения ребенка» [4, с. 145].

Задача 1. Создание модели: возьмите кусок веревки или шнура длиной примерно 40 см. Измерять длину шнура не обязательно, постарайтесь на глаз определить нужную длину. Завяжите узел, как показано на рисунке 1А, далее завяжите бантик так, как вы это делаете, завязывая шнуры на ботинках (рис. 1Б). После чего соедините свободные концы веревки скотчем (рис. 1В).

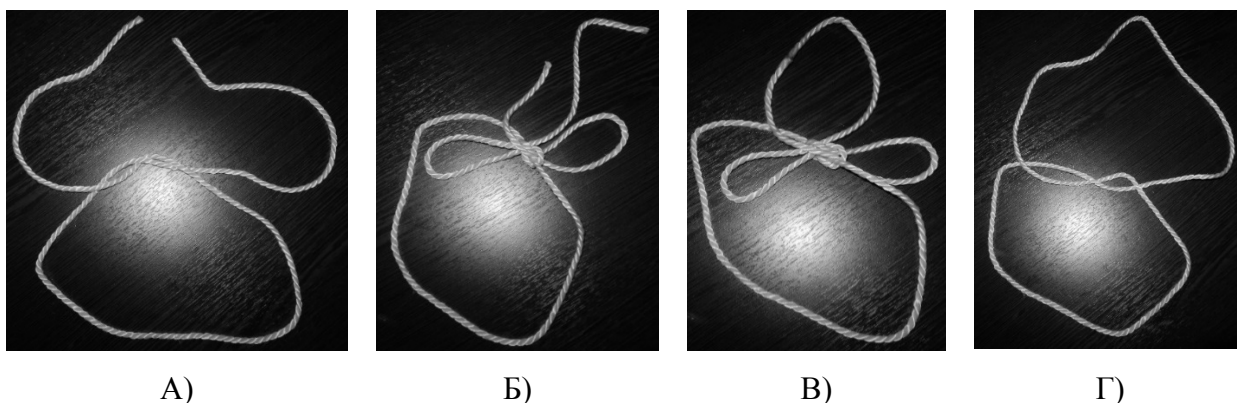


Рис. 1. Создание и преобразование узла «Бантик»

Задание. Попробуйте развязать получившийся узел, не разрывая концов, удалось ли вам это? Зарисуйте ваш узел после «развязывания». Измерьте длину веревки измерительным инструментом, насколько точно вам удалось определить длину веревки «на глаз»?

После попыток развязывания учащиеся приходят к выводу, что полностью развязать данный узел не удалось, но после «развязывания» бантик стал иметь вид одинарного узла (рис. 1Г), при этом нам не пришлось разрывать концы узла и завязывать вновь.

Выводы: в реальной жизни мы, приложив некоторые усилия для развязывания, можем развязать полностью узел любой сложности, но для этого концы узла должны быть свободны. Узел с соединенными концами не всегда можно развязать полностью, однако в результате процесса развязывания можно прийти к более простому виду узла. При изображении узла после развязывания (рис. 1Г) на бумаге, необходимо обратить внимание на то, что веревки на модели узла не пересекаются, как тогда можно назвать интуитивно их расположение? Веревки скрещиваются. В школьном курсе в разделе «Линии» учащихся

знакомят с понятиями самопересекающаяся кривая и кривая без самопересечений, но окружающие нас линии очень часто скрещиваются. Как же изобразить какая веревка проходит сверху, а какая снизу при скрещивании? Нижнюю веревку обычно изображают с разрывом, а верхнюю – сплошной линией.

В данной задаче на интуитивном уровне даны понятия скрещивающихся кривых, точки скрещивания, узла. Веревка – модель кривой линии, «развязывание узла» – геометрическое преобразование кривой. Изготовление модели без измерительных инструментов также имеет развивающее воздействие и экономит время на уроке.

Первое знакомство учащихся с узлами приводит к таким определениям: узел – замкнутая пространственная кривая, не имеющая точек самопересечения. Точки скрещивания – точки, в которых скрещивается несколько участков линий. Возникает вопрос, который можно обсудить с учениками: можно ли считать окружность узлом? И прийти к выводу, что окружность – простейший узел.

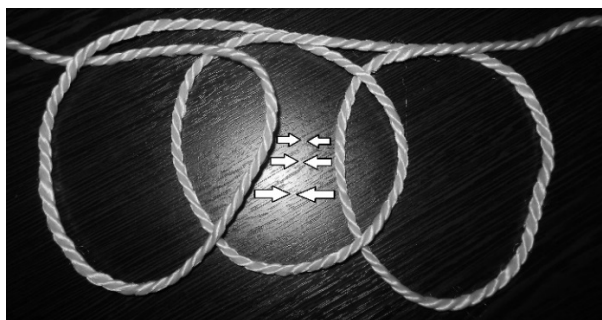
Задача 2. «Морской узел» – топовый узел (рис. 2Е).

Создание модели:

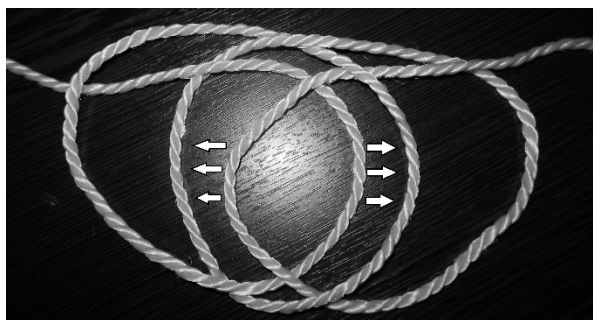
1. Возьмем длинную веревку (примерно 1 метр) и свернем три кольца, как показано на рисунке 2А.
2. Крайние кольца сближаем так, чтобы одно проходило над другим (рис. 2Б).
3. Продолжаем затягивать одно кольцо через другое (рис. 2 В и Г).
4. Получаем топовый узел (рис. 2 Д).
5. Обязательно соединяем концы веревки (рис. 2 Е).

Задание. Потяните получившийся узел за концы в разные стороны, какой вид примет наш узел? Зарисуйте получившийся узел после развязывания. Измерьте длину веревки измерительным инструментом, насколько точно вам удалось определить длину веревки «на глаз»?

Топовый узел легко развязывается, превращаясь в замкнутую кривую (окружность), при этом не придется разрывать концы веревки и завязывать снова.



А)



Б)

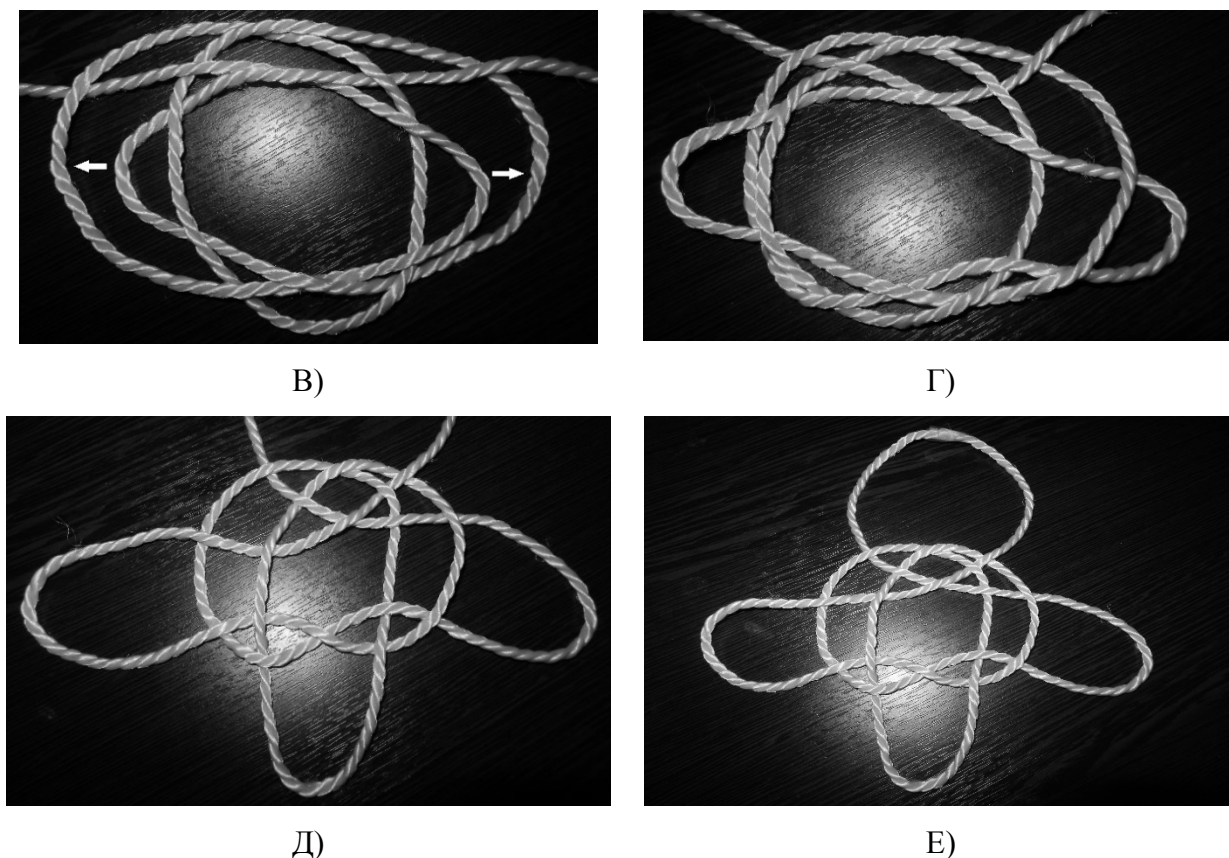


Рис. 2. Создание «Топового» узла

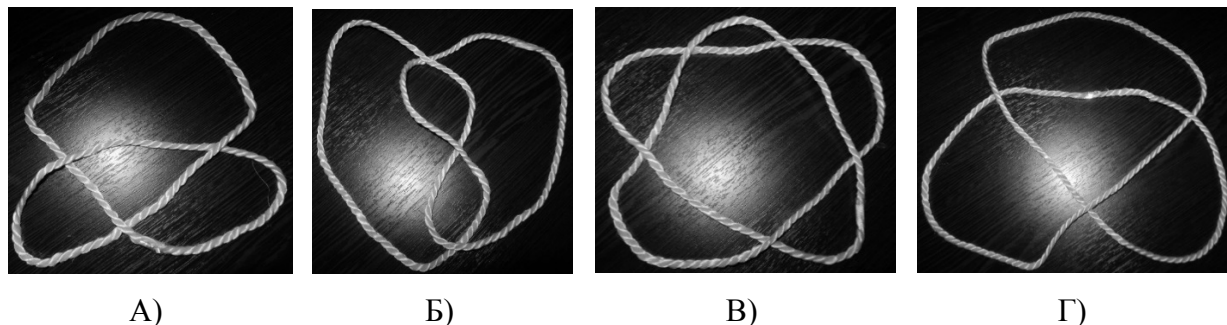


Рис. 3. Преобразования «Сердечной петли»

Вывод: выполняя преобразования на плоскости, можно получить один и тот же узел разного внешнего вида. Топовый узел может быть легко развязан в окружность. Топовый узел и окружность – это один и тот же узел. Учащиеся интуитивно знакомятся с понятием «изотопный узел» – узел, который можно перевязать в другой, не разрезая и не допуская самопересечения.

Задача 3. Создание модели: завяжите одинарный узел, как показано на рисунке 1А. Далее, скрепив концы веревки скотчем, уложите ее, как показано на рисунке 3А, данный узел называется «Сердечная петля».

Задание. Попробуйте, не поднимая веревку со стола и не переворачивая, выполнить

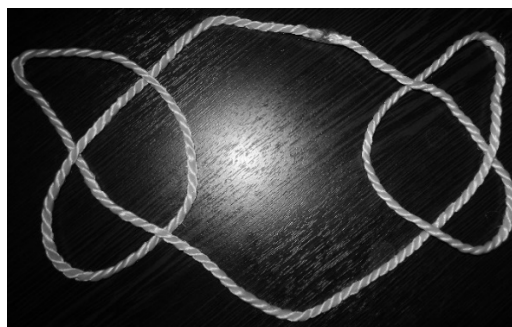
некоторые преобразования, приводящие узел на рисунке 3А к виду, указанному на рисунке 3Б, далее к виду на рисунке 3В. Посмотрите внимательно на рисунки 3А и 3Г («сердечные петли»): каким образом один узел получен из другого? Исследуйте, можно ли перевести одну «сердечную петлю» в другую, не разрывая и не завязывая вновь веревку?

Выводы: учащиеся с помощью учителя делают вывод, что один из узлов получен из другого зеркальным отражением относительно некоторой прямой, а точнее относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. Выполнив это задание, учащиеся приходят к выводу, что один и тот же узел может иметь разный вид, по-разному расположен в пространстве. При кажущейся одинаковости некоторых узлов невозможно из одного узла получить другой, не разрывая и не склеивая концов.

Решая задачу 3, учащиеся выполняют различные преобразования узлов, не следуя точной инструкции, а самостоятельно, ведь каждый может сам выбрать последовательность действий в соответствии со своим индивидуальным опытом и особенностями; представляют зеркальное отражение объекта, воображая зеркало, что способствует развитию пространственных представлений.



А)



Б)

Рис. 4. «Сквер-узел» и «Бабушкин узел»

Задача 4. Изготовьте самостоятельно модели на рисунках 4А и 4Б, эти узлы имеют свои названия: «Сквер-узел» (рис. 4А) и «Бабушкин узел» (рис. 4Б). Для этого сначала внимательно рассмотрите рисунки, а затем по памяти создайте модели узлов.

Задание. Опишите сходства и различия получившихся моделей. Является ли один узел зеркальным отражением другого? Можно ли один узел перевести в другой, не разрывая и не завязывая вновь нить? Какая длина веревки вам потребовалась для изготовления модели? Опишите словами пошагово, как вы создавали модели узлов?

Выводы: решая задачу, учащиеся самостоятельно выбирают способ изготовления моделей, определяют требующуюся длину веревки, изучают конструктивные особенности. Закрепляют представления о зеркальном отображении, делая вывод, что один узел не является зеркальным отображением другого. Опытным путем получают, что один узел из

другого получить невозможно без разрыва веревки. Словесное описание процесса изготовления модели также оказывает положительное влияние на развитие пространственных представлений учащихся.

По мнению С.Л. Рубинштейна, образ, создаваемый по памяти, в отсутствие наглядной основы, «освобождается от "прикованности" к единичному объекту и может быть обобщенным образом целого класса или категории аналогичных предметов» [4, с. 153].

Мы рассмотрели набор топологических задач раздела «Узлы», которые можно использовать в процессе изучения раздела «Линии» в 5 классе для развития пространственных представлений учащихся. «Узлы» – не единственные модели кривых линий в пространстве, полезно также рассмотреть косы, зацепления, ленту Мебиуса, при этом необходимо обращать внимание обучающихся на расположение кривых в пространстве, изготавливать модели, воображать различные трансформации моделей, обходя сложные топологические понятия.

Таким образом, решая представленные задачи, учащиеся интуитивно усваивают понятия: замкнутость, кривая, узел, преобразования кривой, эквивалентность, зеркальное отображение относительно плоскости. Практическая работа по моделированию с помощью веревки позволяет более эффективно развивать пространственные представления учащихся, что в свою очередь способствует формированию познавательных универсальных учебных действий, определенных в федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования.

Список литературы

1. Большой психологический словарь. – М.: АСТ, 2009. – 816 с.
2. Маклаков А.Г. Общая психология: учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2016. – 583 с.
3. Глейзер Г.Д. Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии. – М.: Педагогика, 1978. – 104 с.
4. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / под ред. В.А. Гусева. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 368 с.
5. Верченко С.Б. Развитие пространственных представлений учащихся при изучении геометрического материала в 4-5 классах средней школы: дис. ... канд. пед. наук. – М., 1983. – 167 с.