УДК 371.3:51:004.9

ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ СРЕДАХ MATHCAD И MAPLE

Далингер В.А.[1]

[1]*ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет», Омск, e-mail dalinger@omgpu.ru*

В статье рассматривается вопрос о дидактико-технологических особенностях обучения учащихся решению экономических задач средствами математических сред Mathcad и Maple; отмечается, что математическое моделирование является мощным методом познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления, а метод математического моделирования сводит исследование явлений внешнего мира к математическим задачам; математические модели стали необходимым аппаратом в области экономического планирования. Указаны типы экономико-математических моделей: макроэкономические, микроэкономические, балансовые, теоретические, практические, статические, динамические, детерминированные, оптимизационные, стохастические; показано, что процесс математического моделирования включает три этапа: построение модели, внутримодельное решение, интерпретация результата; поясняется, каким образом указанные модели помогают решать задачи по таким темам, как системы линейных уравнений, линейная и квадратичная функции, дифференциальное исчисление функции одной переменной; приведены примеры экономических задач линейного и нелинейного программирования, которые соответствуют тем или иным темам школьного курса математики (приведенные в статье экономические задачи решены в математических средах Mathcad и Maple); учащиеся знакомятся с такими функциями указанных математических сред, как inequal, optionfeasible, optionexcluded, simplex, maximize, а также с такими понятиями, как линии уровня: изокват, изокост.

Ключевые слова: математическое моделирование, модель, экономические задачи линейного и нелинейного программирования, математические среды Mathcad и Maple.

TRAINING OF PUPILS IN THE SOLUTION OF ECONOMIC TASKS IN THE MATHEMATICAL MATHCAD AND MAPLE ENVIRONMENTS

Dalinger V.A.[1]

[1]*Omsk state pedagogical university, Omsk, e-mail of dalinger@omgpu.ru*

In article the question of didaktiko-technological features of training of pupils in the solution of economic tasks is considered by means of the mathematical Mathcad and Maple environments; it is noted that mathematical modeling is a powerful method of knowledge of the outside world and also forecasting and management, and the method of mathematical modeling reduces a research of the phenomena of the outside world to mathematical tasks; mathematical models became the necessary device in the field of economic planning. Types of economic-mathematical models are specified: macroeconomic, microeconomic, balance, theoretical, practical, static, dynamic, determined, optimizing, stochastic; it is shown that process of mathematical modeling includes three stages: creation of model, intra model solution, interpretation of result; it is explained how the specified models help to solve problems of such subjects as: systems of the linear equations, linear and square functions, differential calculus of function of one variable; examples of economic problems of linear and nonlinear programming which correspond to these or those subjects of a school course of mathematics are given (the economic tasks given in article are solved in the mathematical Mathcad and Maple environments); pupils get acquainted with such functions of the specified mathematical environments as: inequal, optionfeasible, optionexcluded, simplex, maximize, and also with such concepts as lines of level: izokvant, izocost.

Keywords: mathematical modeling, model, economic problems of linear and nonlinear programming, mathematical Mathcad and Maple environments.

Инструментом исследования во многих сферах человеческой деятельности выступают математические модели, характерным свойством которых является общность по отношению к изучаемым объектам. Важно то, что одна и та же модель может описывать процессы различной природы [1-3].

В.А. Штофф под моделью понимает «…такую мысленно представляемую или материально реализованную систему, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает новую информацию об объекте» [4, с. 22].

Математическое моделирование – мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления. Метод математического моделирования сводит исследование явлений внешнего мира к математическим задачам. Математические модели стали необходимым аппаратом в области экономического планирования.

Выделяют следующие классы экономико-математических моделей: макроэкономические, микроэкономические, балансовые, теоретические, практические, статические, динамические, детерминированные, оптимизационные, стохастические [5; 6].

Процесс математического моделирования включает три этапа: построение модели, внутримодельное решение, интерпретация ответа.

Знакомить учащихся с основными понятиями и видами деятельности в экономической сфере можно в процессе обучения математике, решая экономические задачи [7].

Покажем на примерах, каким образом можно экономические задачи решить средствами Mathcad и Maple и дадим дидактико-методические рекомендации по использованию этих средств.

Тема «Линейная функция»

Задача 1. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 12000 рублей в месяц, а переменные – 300 рублей за один час. Цена часов 500 рублей. Написать функции дохода и издержек. Построить графики. Найти точку безубыточности. (Точкой безубыточности называют точку, в которой прибыль обращается в нуль.)

Тема «Квадратичная функция»

Задача 2. При производстве табуреток производитель закупает древесину у поставщика. Поставщик делает незначительные скидки при увеличении объема закупки, в результате стоимость древесины составляет $p=100-0{,}001q$, где p – цена 1 единицы, ден. ед.; q – объем продаж поставщика, $м^3$. Затраты по заготовке и хранению древесины составляют $C(q)=550+40q$. При каком объеме продаж можно достичь максимальной прибыли?

Заметим, что прибыль $П$ равна разности между выручкой (полным доходом) U и затратами (полными затратами) C , то есть $П=U – C$. Выручка U равна произведению цены р за единицу товара на количество проданных единиц товара х: $U(x) = p \cdot x$.

Цена р зависит от спроса и $p(x) = ax + b$, причем $a<0$. Тогда $U(x) = px = (ax+b)\cdot x = ax^2 + bx$ – это парабола, у которой ветви направлены вниз.

Полный доход достигает максимального значения при $x = -\frac{b}{2a}$.

Тема «Система линейных уравнений»

Задача 3. В таблице 1 приведены расценки на выполнение работ для каждого вида оборудования. Найдите расчетные объемы работ (количество часов использования оборудования), которые смогут окупить затраты на эксплуатацию.

Таблица 1

Расценки на выполнение работ для различных видов оборудования

Виды работ	Нормативы по видам оборудования, ден. ед.			Полные затраты на эксплуатацию, ден. ед.
	механическое	тепловое	энергетическое	
Техническое обслуживание	3	1	4	85
Текущие услуги	2	2	3	82
Капитальный ремонт	10	20	15	580

Тема «Дифференцирование функции одной переменной»

Задача 4. Себестоимость производства телевизоров y (тысяч руб.) описывается функцией $y(x) = 0{,}01x^2 - 0{,}5x + 12$ $(5 \leq x \leq 50)$, где x – объем выпускаемой продукции в месяц (тыс. ед.). Определить скорость и темп изменения себестоимости при выпуске 20 и 40 тыс. ед. продукции.

Рассмотрим ***задачи линейного и нелинейного программирования.***

Задача 5. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы продуктов даны в таблице 2. Требуется определить количество мороженого каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был наибольшим.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более, чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Отпускная цена одного килограмма сливочного мороженого 16 у.е., шоколадного – 14 у.е.

Решение. Обозначим: x_1 – суточный объем (в кг) выпуска сливочного мороженого, x_2 – аналогичный объем шоколадного. Составим математическую модель задачи.

Таблица 2

Расход продуктов на изготовление различных сортов мороженого

Исходный продукт	Расход на 1 кг сливочного	Расход на 1 кг шоколадного	Запас, кг
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Целевая функция имеет вид $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 16\boldsymbol{x}_1 + 14\boldsymbol{x}_2$. Система ограничений:

$$\begin{cases} 0.8x_1 + 0.5x_2 \le 400 \quad (\textit{по молоку}) \\ 0.4x_1 + 0.8x_2 \le 365 \quad (\textit{по наполнителям}) \\ x_1 - x_2 \le 100 \quad (\textit{по спросу}) \\ x_2 \le 350 \quad (\textit{по спросу}) \end{cases}$$

и, естественно, $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$. Укажем на рисунке допустимую область. В системе Maple в пакете расширения *plots* имеется специальная графическая функция *inequal*, которая на плоскости строит область, описываемую линейными неравенствами. Действие этой функции продемонстрируем на нашем примере.

Наберем такой текст:

$restart;$

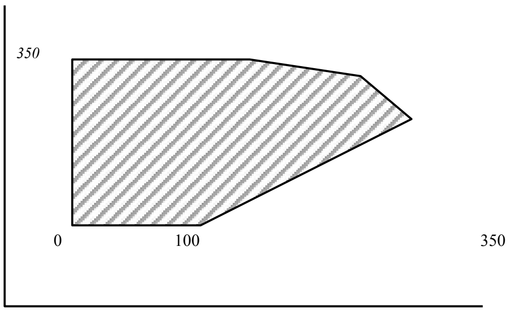
$with(plots):$

$ineqs := \{0.8 * x1 + 0.5 * x2 <= 400, 0.4 * x1 + 0.8 * x2 <= 365, x1 - x2 <= 100, x2 <= 365\}:$

$inequal(ineqs, x1 = 0..350, x2 = 0..350,$

$optionsfeasible = (color = red), optionsexcluded = (color = white));$

Здесь опция цветов *optionfeasible* задает цвет области, для которой удовлетворяются все неравенства; на экране она будет закрашена в красный цвет (*red*). Опция *optionexcluded* задает цвет внешности допустимой области; она согласно тексту документа закрашена в белый цвет (*white*), т.е. вообще не закрашена.



Графическое изображение допустимой области ограничений

Далее приступим к максимизации целевой функции. Подключим пакет решения задач линейной оптимизации *simplex*, зададим целевую функцию, используем встроенную функцию *maximize*. Закажем ее максимальное значение.

$with(simplex):$

$\boldsymbol{f} := 16 * \boldsymbol{x1} + 14 * \boldsymbol{x2}:$

$\max imize(f, ineqs, NONNEGAITIVE);$

$\{x2 = 300.0000000, x1 = 312.5000000\}$

$x1 := 312.5 : x2 := 300 :$

$f;$

9200.0

Нетрудно расшифровать последние строки документа: оптимальные объемы и наибольший доход: $(x_1, x_2)_{опт} = (312.5; 300)$, $f_{max} = 9200$.

А вот решение этой же задачи в системе Mathcad.

$$ORIGIN \equiv 1$$
$$f(x1, x2) := 16 \cdot x1 + 14 \cdot x2$$
$$g1(x1, x2) := 0.8 \cdot x1 + 0.5 \cdot x2 - 400 \quad g2(x1, x2) := 0.4 \cdot x1 + 0.8 \cdot x2 - 365$$
$$g3(x1, x2) := x1 - x2 - 100 \quad g4(x1, x2) := x2 - 365$$
$$x1 := 0 \quad x2 := 0$$
$$Given \quad g1(x1, x2) \le 0 \quad g2(x1, x2) \le 0 \quad g3(x1, x2) \le 0 \quad g4(x1, x2) \le 0$$
$$x1 \ge 0 \quad x2 \ge 0 \quad M := Maximize(f, x1, x2)$$
$$M = \begin{pmatrix} 312.5 \\ 300 \end{pmatrix} \quad f(M_1, M_2) = 9200$$

Обратимся далее к задаче нелинейного математического программирования: «задача о посылке», в решении которой тестируются различные методы оптимизации. Приведем эту задачу в двух вариантах.

Задача 6.

А. Стандартная задача. Посылка, которую должны отправить по почте, имеет форму ящика с размерами в дюймах:

$$x_1, x_2, x_3; \quad x_i \le 42 \ (i = 1,2,3); \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 72 \ .$$

При каких размерах объем посылки будет наибольшим?

Б. Модифицированная задача. Она аналогична задаче, приведенной выше, но ограничения немного другие:

$$x_1 \le 20, x_2 \le 11, x_3 \le 42; \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 72 \ .$$

Любители программирования на Бейсике могут найти решения в интересной работе [8]. Попытаемся решить в системе Mathcad модифицированную задачу.

$$ORIGIN \equiv 1$$
$$V(x1, x2, x3) := x1 \cdot x2 \cdot x3$$
$$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad x3 := 1$$
$$Given$$
$$x1 \ge 0 \quad x2 \ge 0 \quad x3 \ge 0 \quad x1 \le 20 \quad x2 \le 11 \quad x3 \le 42$$
$$x1 + 2 \cdot x2 + 2 \cdot x3 \le 72$$
$$M := \max imize(V, x1, x2, x3)$$
$$M^T = (20 \ \ 11 \ \ 15) \quad V(M_1, M_2, M_3) = 3300$$

Как видно, Mathcad справился с решением задачи. А вот попытки решить ее в системе Maple не увенчались успехом.

В экономических исследованиях широко применяются так называемые производственные функции, выражающие зависимость результата производства от затрат ресурсов. В качестве ресурсов (факторов производства) на макроуровне обычно рассматривается накопленный труд в форме производственных фондов (капитал) *K* и живой труд *L*, а в качестве результата – валовой выпуск *Y*. Таким образом, используется в экономике модель вида: $Y = F(K, L)$.

Возникновение теории производственных функций принято относить к 1928 г., когда появилась статья американских ученых – экономиста П. Дугласа и математика Д. Кобба – «Теория производства», в которой эмпирическим путем определялось влияние затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США по данным за 1899-1922 гг. Коббом была предложена мультипликативная производственная функция $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ $(A = 1.01, \alpha = 0.25, \beta = 0.75)$.

Отечественные экономисты также занимались построениями производственных функций. Так, на основании данных по экономике Российской Федерации бывшего СССР за 1960-1994 гг. мультипликативная функция валового выпуска имела параметры $A = 0.931, \alpha = 0.539, \beta = 0.594$.

Производственные функции являются основными элементами в различных моделях поведения производителей. В следующем примере рассмотрены основные задачи оптимизации производства для случая однопродуктовой двухресурсной мультипликативной производственной функции. Используются обозначения: x_1, x_2 – объемы используемых фирмой ресурсов, p_1, p_2 – рыночные цены на эти ресурсы, p – цена единицы выпускаемой продукции, $f(x_1, x_2)$ – ее объем. Основными задачами в теории фирмы являются следующие.

1. Максимизировать прибыль – разность между выручкой от продажи продукции и затратами на приобретение ресурсов

$$P(x_1, x_2) = pf(x_1, x_2) - (p_1x_1 + p_2x_2) .$$

2. При заданном ограничении на затраты найти комбинацию ресурсов, максимизирующую выпуск, т.е. решить задачу

$$f(x_1, x_2) \to \max \quad (p_1x_1 + p_2x_2 \le C).$$

3. При заданном объеме выпуска найти комбинацию ресурсов, обеспечивающую

минимум затрат, – решить задачу

$$p_1x_1 + p_2x_2 = C(x_1, x_2) \to \min \quad (f(x_1, x_2) = Q)\ .$$

Здесь переменные неотрицательные, в задачах 2 и 3 C, Q – заданные положительные числа. Предполагая $f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, для компьютерного решения зададим конкретные значения параметров.

Учащимся может быть предложена следующая задача.

Задача 7. Решить задачи 1–3, учитывая условия:

$$A = 3, \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad p = 1, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad C = 10, \quad Q = 6\ .$$

В задаче 1 между переменными нет связи; имеем безусловную оптимизацию функции прибыли, которая строго вогнутая. Поэтому в единственной стационарной точке $(0.5; 0.25)$ имеется минимум, равный 0.5.

В задаче 2 надо искать наибольшее значение выпуска в замкнутой области, описываемой неравенствами $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_1 + 2x_2 \le 10$. Так как стационарных точек нет, то максимум нужно искать на границе области, а именно на изокосте $\{(x_1, x_2) : x_1 + 2x_2 = 10\}$. Геометрическое решение будет состоять в том, чтобы среди всех изоквант (линий уровня функции выпуска) выбрать ту, которая касается изокосты. Точка касания $(5; 2.5)$ – искомая; в этом легко убедиться, применяя метод Лагранжа. Максимальное значение выпуска приблизительно 6.962.

Задачу 3 также можно решить геометрически: среди изокост $\{(x_1, x_2) : x_1 + 2x_2 = const\}$ выбрать ту, которая касается изокванты $f = 10$. Минимум затрат, равный 8, достигается в точке $(4; 2)$.

Другие экономические задачи, решаемые в математических средах Mathcad и Maple, читатель найдет в наших работах [9; 10].

Выводы

Проведенный педагогический эксперимент в профильных экономических классах показал, что, работая с математическими пакетами Mathcad и Maple, учащиеся учатся использовать особенности этих пакетов в решении экономических задач линейного и нелинейного программирования, приобретают умения по работе с таблицами и графическим материалом, который имеет важное значение в работе экономистов, овладевают умением визуализировать различную экономическую информацию и статистическими методами обрабатывать различного рода экономические результаты.

Список литературы

1. Нетёсова О.Ю. Информационные системы и технологии в экономике: учебное пособие. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Юрайт, 2018. - 146 с.
2. Детушев И.В. Математика для экономического бакалавриата: задачник по курсу «Математика» для студентов экономических специальностей. – Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2013. – 136 с.
3. Гуринович С.Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием. – Минск: Новое издание, 2008. – 201 с.
4. Штофф В.А. Моделирование и философия. – М.–Л.: Наука; Ленинградское отделение, 1966. – 301 с.
5. Гребенников П.И. Экономика: учебник / П.И. Гребенников, Л.С. Тарасевич. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2018. - 309 с.
6. Бурмистрова Н.А. Математическое моделирование экономических процессов как средство формирования профессиональной компетентности будущих специалистов финансовой сферы при обучении математике. – М.: Логос, 2010. – 228 с.
7. Далингер В.А. Экономическое образование учащихся на уроках математики // Менеджмент в социальных структурах: межвузовский сборник научных трудов. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999. – С. 298-310.
8. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
9. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Решение уравнений и оптимизация на компьютере: учебное пособие. – Омск: Амфора, 2011. – 155 с.
10. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Информатика и математика. Решение уравнений и оптимизация в Mathcad и Maple: учебник и практикум. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: Юрайт, 2018. - 161 с.