УДК 37:533.17

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КВАЗИОДНОМЕРНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ

Косолапов Е.А.[1], Михалко А.Э.[2]

[1]ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», Нижний Новгород, e-mail: kosolap2005@rambler.ru;
[2]АО «НПП «Полёт», Нижний Новгород, e-mail: emihalko1990@mail.ru

В данной работе приведены составленные авторами задачи и их решение по курсу газодинамики для студентов соответствующих специальностей вузов. Особенностью течения газа, в условиях этих задач, является использование сразу двух приближений: квазиодномерного и несжимаемого течения. Квазиодномерное приближение, несмотря на одну независимую переменную, учитывает изменение геометрии канала вдоль течения. Модель несжимаемого течения довольно точна при небольших числах Маха. Несмотря на ограничения используемых приближений, они позволяют довольно просто решать нетривиальные задачи. В частности, рассмотрены задачи о подъемной силе крыла и течениях газа в различных конфузорных соплах. При этом решается как прямая задача: определение газодинамических параметров в заданном канале, так и обратная: по заданному распределению параметров определяется контур сопла. Рассчитываются силы давления, действующие на стенки сопла. При решении задач для определения реактивной тяги сопел используются два подхода: прямое интегрирование сил давления на стенки и интегральное уравнение закона сохранения импульса в квазиодномерном приближении. Таким образом, предлагаемые решения могут иметь не только методическое значение, но и использоваться в технических приложениях в качестве первого приближения.

Ключевые слова: задачи несжимаемого течения газа, квазиодномерное приближение, конфузорное сопло, сила тяги сопла.

THE SOLUTION OF TASKS OF QUASI-ONE-DIMENSIONAL GAS DYNAMICS FOR INCOMPRESSIBLE FLOWS

Kosolapov E.A.[1], Mihalko A.E.[2]

[1]Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, e-mail: kosolap2005@rambler.ru;
[2]Joint-stock company «scientifically-industrial enterprise «Polyot», Nizhny Novgorod, e-mail: emihalko1990@mail.ru

In article we present the tasks formulated by the authors and their solutions in the course of gas dynamics. The tasks are intended for students of relevant specialties of higher education institutions. A feature of the gas flow in these tasks is the use of two approximations: quasi-one-dimensional approach and incompressible flow. The quasi-one-dimensional approach, despite one independent variable, takes into account the change in the channel geometry along the flow. The incompressible gas flow model is accurate for small Mach numbers. Despite the limitations, these approximations allow us to solve rather simple non-trivial problems. In particular, the tasks of the lifting force of the wing and gas flows in various confusor nozzles are considered. In this case, two problems are solved. A direct problem is to determine the gasdynamic parameters in a given channel. The inverse problem is to determine the contour of the nozzle with respect to a given distribution of parameters. The value of the pressure acting on the nozzle walls is calculated. In solving tasks to determine the reactive thrust of nozzles, two approaches are used: direct integration of the work of pressure forces in the walls and integral equation of the law of conservation of momentum in the quasi-one-dimensional approach. Thus, the proposed solutions have not only methodological significance. They can be used in technical applications as a first approximation.

Keywords: incompressible gas flow tasks, quasi-one-dimensional approach, confusor nozzle, nozzle thrust force.

На многих направлениях подготовки в технических вузах читается курс «Газодинамика» или подобный. Теоретические основы этой дисциплины приведены, например, в учебниках и учебных пособиях [1; 2]. Важным элементом усвоения этого курса является решение задач. Известны сборники задач по газодинамике [3-5], в которых для решения используются различные приближения. В данной работе делается акцент на составлении и решении задач в специальных приближениях, ограниченных с одной стороны

– несжимаемыми течениями, а с другой – квазиодномерным приближением.

Квазиодномерная математическая модель применяется к течениям газа в каналах с переменной площадью сечения [6-8]. В литературе это приближение иногда называют просто одномерным, хотя для одномерного стационарного течения оставим закон сохранения массы в виде $\rho v = const$, а для квазиодномерного - $\rho v S = const$. Тем более что для нестационарных течений дифференциальные уравнения этих приближений существенно отличаются [6]. Точная трактовка квазиодномерного приближения позволяет решать задачи, которые невозможно решить в одномерном [9].

Целью данной работы является расширение круга задач дозвуковой газодинамики, которые могут решаться в рамках таких приближений, как несжимаемость и квазиодномерность. Демонстрация таких задач и их решений носит методический характер, указывая на возможность подобных более простых решений. Такой подход позволяет более быстро получать предварительные инженерные решения.

Течения газа, при которых плотность остается постоянной, называются несжимаемыми. Если нет внешних тепловых и силовых воздействий на поток, то при небольших числах Маха $М < 0{,}2$ плотность газа меняется незначительно и течения можно считать несжимаемыми. Общая система уравнений несжимаемых течений имеет вид

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 = const \\ \rho v S = Q = cons \\ \dfrac{\rho v^2}{2} + p = p_0 = const \end{cases}, \qquad (1)$$

где неизвестными являются давление и скорость - p и v. Плотность торможения, остающаяся постоянной, предполагается известной.

Учитывая уравнение состояния, процесс течения газа можно считать изохорным: $p/T = \rho R = const$. Таким образом, в приведенных ниже задачах можно считать, что в области течения газа меняются только его скорость, давление и температура.

Для несжимаемого течения выполняется закон сохранения объемного расхода $V' = vS = const$. Он является следствием первого и второго уравнений системы (1).

Для воздуха приняты следующие значения параметров: показатель адиабаты - $k = 1{,}4$ и газовая постоянная - $R = 287\,Дж/(кг \cdot К)$.

Параметры стандартной атмосферы:

- давление - $p_{атм} = 1{,}01 \cdot 10^5\,Па$,
- температура - $T_{атм} = 288K$,

- плотность - $\rho_{\grave{a}\grave{o}\grave{i}} = 1{,}22\,\hat{e}\tilde{a}/\grave{i}^{\ 3}$.

Ускорение силы тяжести - $g = 9{,}81\grave{i}\ /\tilde{n}^2$.

Решение задач о внешнем обтекании тел различной формы

Задача 1. Самолетное крыло движется в воздухе со скоростью - $v = 150\hat{e}\grave{i}\ /\div$ (рис. 1) под нулевым углом атаки. Обтекание безотрывное. Длина верхнего обвода профиля крыла самолета $l_2 = 1{,}3\grave{i}$, а нижнего - $l_1 = 1\grave{i}$ (рис. 1). Длина одного крыла - $L = 15\grave{i}$. Определить подъемную силу двух крыльев самолета и его максимальную грузоподъемность.

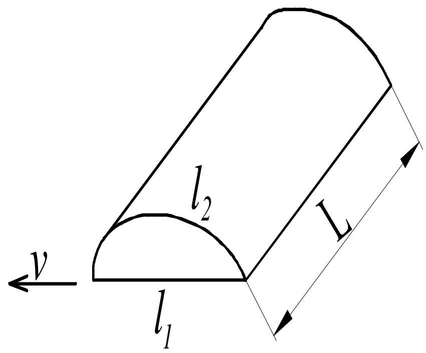

Рис. 1. К задаче 1

Решение.

1. При безотрывном обтекании крыла время течения верхней струи t равняется времени течения нижней. В первом приближении считаем обтекание равномерным: $v_1 = v = 41{,}7\grave{i}\ /\tilde{n} = \frac{l_1}{t}$ и $v_2 = \frac{l_2}{t}$, отсюда $v_2 = \frac{l_2}{l_1}v_1$.

2. Из уравнения Бернулли $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$ выразим разность давлений $p_1 - p_2 = \frac{\rho v^2}{2}\left[\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 - 1\right]$.

В итоге: подъемная сила крыльев $F = 2l_1L(p_1 - p_2) = l_1L\rho v^2\left[\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 - 1\right] = 21{,}4\hat{e}\acute{I}$ и грузоподъемность $m = \frac{F}{g} = 2{,}18\grave{o}$.

Задача 2. Вентилятор мощностью $W = 18\hat{A}\grave{o}$ и с фланцем диаметром $d = 0{,}1\grave{i}$ всасывает воздух. Определить объемный расход и скорость воздуха за вентилятором.

Решение. Мощность вентилятора тратится не на продвижение воздуха по трубе, это другая задача, а на разгон атмосферного воздуха. Т.к. данных по к.п.д. в условиях задачи нет, то полагаем его равным единице. Тогда мощность $W = Fv$.

1. Сила F создается разностью давлений до и после вентилятора $F = (p_{\grave{a}\grave{o}\grave{i}} - p)S$.

2. Выразив разность давлений из уравнения Бернулли, получим основное уравнение задачи $W = \frac{\rho_{\grave{a}\grave{o}\grave{i}}\, v^3 S}{2}$.

В итоге: скорость будет $v = \sqrt[3]{\dfrac{8W}{\pi d^2 \rho_{\text{àòì}}}} = 15{,}1\text{ì} / \text{ñ}$. Объемный расход, соответственно -

$V' = vS = \dfrac{\pi d^2 v}{4}$, $V' = 0{,}119\text{ì}^{3}/\text{ñ} = 427\text{ì}^{3}/\div$.

Задача 3. С какой скоростью v должен двигаться воздух в пульверизаторе (рис. 2), чтобы разбрызгивалась вода с плотностью $\rho_{\text{âîä}} = 10^3 \,\text{êã}/\text{ì}^{3}$, если $h = 0{,}1\text{ì}$?

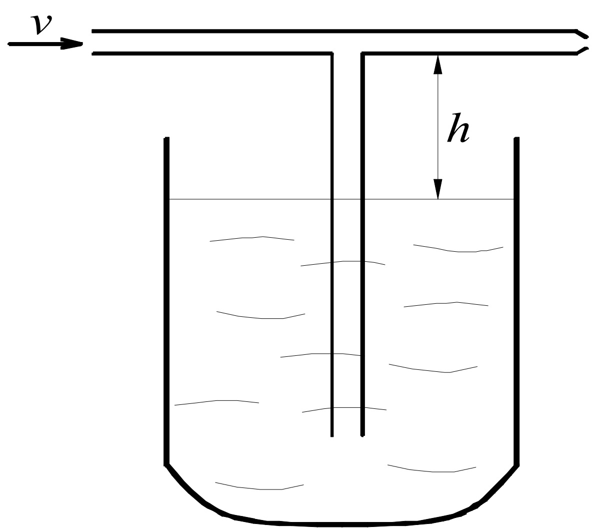

Рис. 2. К задаче 2

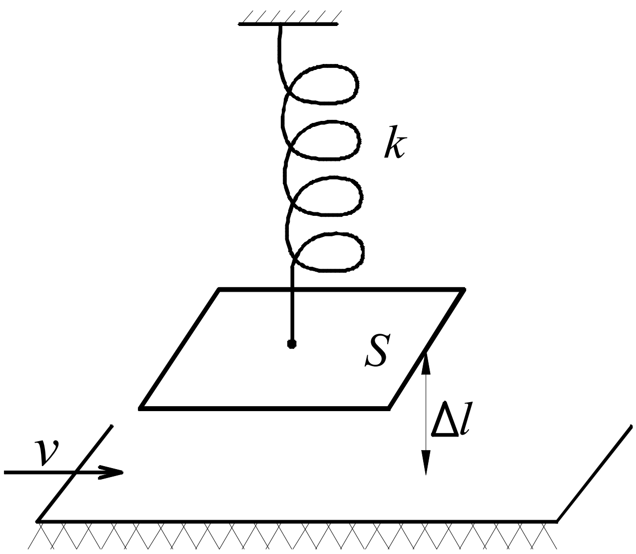

Рис. 3. К задаче 3

Решение. Разность давлений за счет увеличения скорости течения, по уравнению Бернулли, должна поднять столб воды: $\dfrac{\rho_{\text{àòì}} v^2}{2} = \rho_{\text{âîäû}} gh$. Таким образом, $v = \sqrt{\dfrac{2\rho_{\text{âîäû}} gh}{\rho_{\text{àòì}}}} = 40{,}1\text{ì} / \text{ñ}$.

Задача 4. Невесомая пластина закреплена на пружине сверху от горизонтальной плоскости на расстоянии Δl (рис. 3). Площадь пластины S, жесткость пружины k'. Определить, с какой скоростью надо продувать воздух между пластиной и плоскостью, чтобы она опустилась вниз?

Решение. Разность давлений $p_{\text{àòì}} - p$ должна компенсировать силу упругости пружины. Выразив эту разность через скорость из уравнения Бернулли, получим уравнение $\dfrac{\rho v^2}{2} S = k\Delta l$, отсюда $v = \sqrt{\dfrac{2k\Delta l}{\rho S}}$.

Решение задач о течении газа в различных конфузорных соплах

Задача 5. Дано конфузорное коническое сопло (рис. 4), радиус сечения которого определяется следующей зависимостью: $r(x) = r_{\hat{a}\tilde{o}} - \frac{r_{\hat{a}\tilde{o}} - r_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}}}{l}x$, где радиусы входного и выходного сечений равны $r_{\hat{a}\tilde{o}} = 0{,}1\grave{\imath}$ и $r_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}} = 0{,}05\grave{\imath}$, а длина сопла $l = 1\grave{\imath}$. Ось x направлена по оси сопла. Скорость газа во входном сечении $v_{\hat{a}\tilde{o}} = 30\grave{\imath}/\tilde{n}$, а плотность $\rho = 10\hat{e}\tilde{a}/\grave{\imath}^3$. Давление на срезе - $p_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}} = 1{,}01\cdot 10^5\,\ddot{I}\grave{a}$. Найти распределение скорости и давления по тракту сопла, а также скорость на срезе $v_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}}$ и давление на входе $p_{\hat{a}\tilde{o}}$.

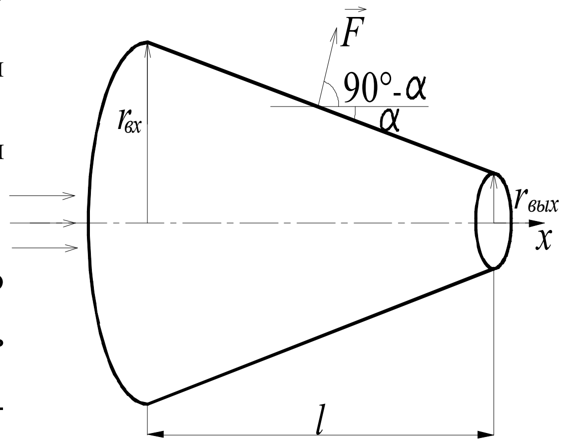

Рис. 4. К задачам 5, 8, 9

Решение. Объемный расход $V' = v_{\hat{a}\tilde{o}}\pi r_{\hat{a}\tilde{o}}^2 = 0{,}942\grave{\imath}^3/\tilde{n}$.

1. Распределение скорости найдем из постоянства объемного расхода $v(x)\pi r^2(x) = V'$

$$\Rightarrow\ v(x) = \frac{V'}{\pi\left(r_{\hat{a}\tilde{o}} - \frac{r_{\hat{a}\tilde{o}} - r_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}}}{l}x\right)^2} \text{ или } v(x) = \frac{0{,}3}{(0{,}1 - 0{,}05x)^2}.$$

Отсюда $v_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}} = v(1) = 120\grave{\imath}/\tilde{n}$.

2. Распределение давления найдем из уравнения Бернулли $\frac{\rho v^2(x)}{2} + p(x) = \frac{\rho v_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}}^2}{2} + p_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}}$

$$\Rightarrow\ p(x) = \frac{\rho}{2}\left[v_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}}^2 - v^2(x)\right] + p_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}} \text{ или } p(x) = 1{,}73\cdot 10^5 - \frac{0{,}545}{(0{,}1 - 0{,}05x)^4}.$$

Отсюда $p_{\hat{a}\tilde{o}} = p(0) = 1{,}68\cdot 10^5\,\ddot{I}\grave{a}$.

Задача 6. В первом сечении конфузорного сопла, диаметр которого - $d_1 = 0{,}2\grave{\imath}$, скорость течения - $v_1 = 70\grave{\imath}/\tilde{n}$. Диаметр среза, который находится на расстоянии $x_0 = 1\grave{\imath}$ от первого сечения, составляет $d_2 = 0{,}1\grave{\imath}$. Полагая, что скорость возрастает линейно по тракту сопла, найти изменение диаметра $d(x)$ по тракту сопла и скорость на срезе.

Решение. **1.** Из закона сохранения объемного расхода: $\frac{\pi d_1^2}{4}v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4}v_2$, следует

$v_2 = \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1$, $v_2 = 280\grave{\imath}\,/\tilde{n}$.

2. В условиях задачи распределение скорости по тракту сопла имеет вид: $v(x) = v_1 + bx$. Тогда $v_2 = v(x_0) = v_1 + bx_0$ и $b = \dfrac{v_2 - v_1}{x_0} = 210\tilde{n}^{-1}$.

Таким образом, распределение скорости $v(x) = 70 + 210x$. Из закона сохранения объемного расхода диаметр канала изменяется по тракту сопла по гиперболической зависимости $d(x) = \dfrac{d_1^2 v_1}{v(x)} = \dfrac{2{,}8}{70 + 210x}$.

Задача 7. Радиус конфузорного сопла Витошинского задан следующей формулой: $r(x) = \dfrac{r_2}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2\right] \cdot \dfrac{l^2 - x^2}{l^2 + x^2}}}$, где радиусы входного сечения $r_1 = 5{,}25см$, выходного - $r_2 = 1{,}18см$, длина $l = 6{,}3см$, $0 \le x \le l$. Плотность газа составляет $\rho = 4кг/м^3$. Во входном сечении скорость $v_1 = 5{,}04м/с$, давление $p_1 = 1{,}2 \cdot 10^5\,Па$. Определить давление и скорость течения газа в выходном сечении и распределение скорости течения газа по тракту сопла.

Решение. Площади входного и выходного сечений сопла: $S_1 = 8{,}66 \cdot 10^{-3}\,м^2$, $S_2 = 4{,}37 \cdot 10^{-4}\,м^2$. **1.** Определим объемный расход газа $V' = v_1 \cdot S_1 = 43{,}7 \cdot 10^{-3}\,м^3/с$.

2. Скорость течения газа на выходе системы найдем из постоянства объемного расхода газа $v_2 = \dfrac{V'}{S_2} = 100м/с$.

3. Из уравнения Бернулли определим полное давление газа $p_0 = \dfrac{\rho \cdot v_1^2}{2} + p_1 = 120кПа$.

В итоге: давление на выходе сопла $p_2(x) = p_0 - \dfrac{\rho \cdot v_2^2}{2} = 100кПа$. Из постоянства объемного расхода $v(x)\pi r^2(x) = V'$ определим распределение скорости течения газа по тракту сопла $v(x) = \dfrac{V'}{\pi r_2^2}\left\{1 - \left[1 - \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2\right]\dfrac{l^2 - x^2}{l^2 + x^2}\right\}$ или $v(x) = 98{,}315 - 1{,}082 \cdot \dfrac{\left(0{,}012 - 3x^2\right)^2}{\left(0{,}012 + x^2\right)^3}$.

Задача 8. В условиях задачи 5 пусть левое (входное) сечение является стенкой. В область этого сечения подается газ, так что его параметры остаются такими же, как в задаче 5. Таким образом, это сопло становится реактивным. Прямым интегрированием силы давления газа, действующего на стенки сопла, найти силу тяги.

Решение.

1. Сила тяги состоит из положительной силы F_+, действующей на входное сечение, и отрицательной F_-, действующей на боковую поверхность (БП) конфузорного сопла: $F_{\text{òÿãè}} = F_+ - F_-$. F_+ определяется легко: $F_+ = \int\limits_{\text{ÂÏ}} pdS = p_{\text{âõ}} S_{\text{âõ}} = 5{,}28\,\text{êÍ}$. Отрицательная составляющая на ось x находится интегрированием по боковой поверхности: $F_- = -\int\limits_{\text{ÂÏ}} p \sin\alpha dS$. С учетом, что $\sin\alpha = const$ для конического сопла, и выразив поверхностное интегрирование через образующую, будем иметь: $F_- = -2\pi \sin\alpha \int\limits_0^l r(x) p(x) \sqrt{1 + r'(x)^2}\, dx$. $\sin\alpha$ может быть выражен через образующую: $\sin\alpha = \dfrac{r'}{\sqrt{1 + r'^2}}$.

2. Из решения задачи 5: $r(x) = 0{,}1 - 0{,}05x$ и $p(x) = 1{,}73 \cdot 10^5 - \dfrac{0{,}545}{(0{,}1 - 0{,}05x)^4}$, тогда $F_- = 0{,}1\pi \int\limits_0^1 (0{,}1 - 0{,}05x)\left[1.73 \cdot 10^5 - \dfrac{0{,}545}{(0{,}1 - 0{,}05x)^4}\right] dx$. Таким образом, вычисление отрицательной составляющей силы тяги сводится к двум интегралам: $F_- = 0{,}314 \cdot (I_1 - I_2)$, где $I_1 = 0{,}173 \cdot 10^5 - 4{,}33 \cdot 10^3 \int\limits_0^1 x dx$ и $I_2 = 0{,}545 \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(0{,}1 - 0{,}05x)^3}$. Вычисление этих интегралов дает $I_1 = 13{,}0 \cdot 10^3$ и $I_2 = 1{,}64 \cdot 10^3$.

Окончательно отрицательная составляющая силы тяги будет иметь значение $F_- = 3{,}58\,\text{êÍ}$. Общая тяга сопла $F_{\text{òÿãè}} = 1{,}64\,\text{êÍ}$.

Задача 9. Вычислить отрицательную составляющую силы тяги для задачи 8, исходя из закона сохранения импульса в интегральной форме.

Решение.

1. Для объема между входным и выходным сечениями и боковой поверхностью (рис. 4) закон сохранения импульса может быть выражен через интегралы по торцевым (тп) и боковым поверхностям [4]: $\int\limits_{\text{ÒÏ}} \rho v^2 dS + \int\limits_{\text{ÒÏ}} pdS - \int\limits_{\text{ÂÏ}} p \sin\alpha dS = 0$. Отсюда отрицательная составляющая силы тяги: $F_- = -\int\limits_{\text{ÂÏ}} p \sin\alpha dS = -\int\limits_{\text{ÒÏ}} \rho v^2 dS - \int\limits_{\text{ÒÏ}} pdS$.

2. После некоторых преобразований к такой же формуле можно прийти на основании работы [10]. Таким образом, отрицательная составляющая силы тяги находится по формуле: $F_- = \rho\left(v_{\text{âõ}}^2 S_{\text{âõ}} - v_{\text{âûõ}}^2 S_{\text{âûõ}}\right) + p_{\text{âõ}} S_{\text{âõ}} - p_{\text{âûõ}} S_{\text{âûõ}}$.

Окончательно $F_{\_} = 3{,}64\hat{e}\acute{I}$, что с точностью вычислений совпадает с результатом задачи 8.

В заключение отметим, что квазиодномерное приближение может учитывать такие дополнительные явления, как изменение конфигурации канала с течением времени, например выгорание теплозащитного покрытия высокотемпературных сопел; поглощение газа стенками канала, например за счет конденсации; теплообмен газа со стенками канала, нарушающий изоэнтропичность течения [6; 9] и т.п.

Представленные задачи можно решать с учетом сжимаемости течений газа. Для этого необходимо использовать газодинамические функции. В качестве упражнений можно рассмотреть вопросы точности приведенных решений с учетом сжимаемости.

Список литературы

1. Мхитарян А.М. Аэродинамика. – М.: Эколит, 2012. – 448 с.
2. Гладышев Н.Н. Газодинамика: конспект лекций. – СПб.: СПбГТУРП, 2012. – 159 с.
3. Давидсон В.Е. Основы гидрогазодинамики в примерах и задачах. – М.: Академия, 2008. – 320 с.
4. Самойлович Г.С. Сборник задач по гидро-аэромеханике / Г.С. Самойлович, В.В. Нитусов. – М.: Машиностроение, 1986. – 152 с.
5. Молчанов А.М. Математическое моделирование задач газодинамики и тепломассообмена. – М.: МАИ, 2013. – 206 с.
6. Косолапов Е.А. Квазиодномерное приближение для расчета течений газа в каналах энергетических установок / Е.А. Косолапов, М.Д. Соленников // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2013. – № 5 (102). – С. 260-267.
7. Косолапов Е.А. Квазиодномерный расчет течений газа в турбинных соплах с косым срезом / Е.А. Косолапов, Э.Э. Рамс, М.Д. Соленников, С.Н. Хрунков // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2. – URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=12571 (дата обращения: 13.07.2018).
8. Лебедев А.С. Практикум по численному решению уравнений в частных производных: уч. пос. / А.С. Лебедев, С.Г. Черный. – Новосибирск: НГУ, 2000. – 136 с.
9. Давыдов Ю.М. Численное моделирование двухфазных течений в соплах методом крупных частиц / Ю.М. Давыдов, Е.А. Косолапов. – М.: Изд. нац. акад. прикл. наук, 1998. – 86 с.
10. Меньщиков В.М. Газовая динамика. Задачи и упражнения / В.М. Меньщиков, В.М. Тешуков. – Новосибирск: НГУ, 2012. – 132 с.