УДК 372.851

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ВАРИАТИВНОСТИ НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОИСК ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Анисова Т.Л. , Чуев В.Ю.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, e-mail: bolashova1@mail.ru

Решение стереометрических задач – одна из важных и сложных тем курса геометрии общеобразовательной школы. Задачи по этой теме традиционно входят в единый государственный экзамен по математике. В статье изложены различные методы решения задачи на нахождение минимальной площади сечения пирамиды плоскостью. Первый метод – чисто геометрический, его выбирают учащиеся, обладающие хорошо развитым пространственным воображением. Основой метода является нахождение расстояния между двумя скрещивающимися прямыми. Второй метод требует нахождения минимума функции с помощью производной. Вводится переменная величина – расстояние от точки пересечения искомой плоскости с одним из ребер до одной из вершин пирамиды. Искомая площадь представляется в виде функции от этой переменной, а затем находится ее минимальное значение. Решать задачу таким способом предпочитают учащиеся, хорошо освоившие алгебру и основы математического анализа. Третьим методом пользуются, как правило, учащиеся школ с углубленным изучением математики. Его основой является введение декартовой системы координат и использование векторного произведения двух векторов для поиска площади треугольника. В качестве примера рассмотрена одна задача, которая решена тремя описанными методами.

Ключевые слова: стереометрия, треугольная пирамида, скрещивающиеся прямые, нахождение экстремальных значений, площадь сечения, векторная алгебра, математика в школе.

IMPLEMENTATION OF THE PRINCIPLE OF VARIABILITY ON THE EXAMPLE OF STUDYING VARIOUS METHODS FOR SOLVING STEREOMETRIC PROBLEMS FOR FINDING EXTREME VALUES

Anisova T.L., Chuev V.Y.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, e-mail: bolashova1@mail.ru

Solving stereometric problems is one of the important and difficult topics of the course of general education school geometry. Tasks on this topic are traditionally included in the unified state exam in mathematics. The article presents various methods for solving the problem of finding the minimum sectional area of a pyramid by a plane. The first method is purely geometric, it is chosen by students with well-developed spatial imagination. The basis of the method is to find the distance between two crossed lines. The second method requires finding the minimum of a function using a derivative. A variable is introduced - the distance from the point of intersection of the desired plane with one of the edges to one of the vertices of the pyramid. The required area is represented as a function of this variable, and then its minimum value is found. Students who have mastered algebra and the basics of mathematical analysis prefer to solve the problem in this way. The third method is uses, as a rule, by students of schools with in-depth study of mathematics. Its basis is the introduction of the Cartesian coordinate system and the use of the vector product of two vectors to search for the area of a triangle. As an example, one problem is considered, which is solved by the three methods described.

Keywords: stereometry, triangular pyramid, crossing straight lines, finding extreme values, cross-sectional area, vector algebra, mathematics at school.

Умение решать задачи – один из главных показателей уровня математической подготовки учащихся и глубины усвоения ими учебного материала. Важнейшей целью обучения математике в общеобразовательной школе является овладение учащимися методами решения определенных типов математических задач.

Одним из самых сложных разделов математики в школе является решение стереометрических задач, т.к. они требуют и развитого пространственного воображения, навыка проводить непростые алгебраические преобразования, а также умения выбирать способ решения [1; 2].

Реализация дидактического принципа вариативности предполагает развитие у учащихся вариативного мышления, т.е. формирование способностей к систематическому перебору вариантов и адекватному принятию решений в ситуациях выбора.

Особое место в стереометрии занимают задачи на поиск экстремальных значений. В общем виде одну из задач этого типа можно сформулировать следующим образом: найти минимальную площадь сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через ее заданное ребро и пересекающей противоположное.

Цель исследования

Разработка методики формирования у школьников стремления к выбору метода решения на примере стереометрических задач на поиск экстремальных значений.

Материал и методы исследования

Задача. Основанием треугольной пирамиды *TABC* является равносторонний треугольник *ABC* со стороной основания, равной $4\sqrt{3}$. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром *TA* и равна $6\sqrt{3}$. Какую наименьшую площадь *S* может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания *AC* и пересекающей боковое ребро TB?

В настоящей статье мы рассмотрим три метода решения задачи: геометрический [3], [4], алгебраический с использованием производной [5-7], а также метод использованием векторной алгебры (для учащихся школ с углубленным изучением математики) [8-10].

Результаты исследования и их обсуждение

Первый метод решения.

Пусть плоскость (AMC) – искомое сечение (рис. 1).

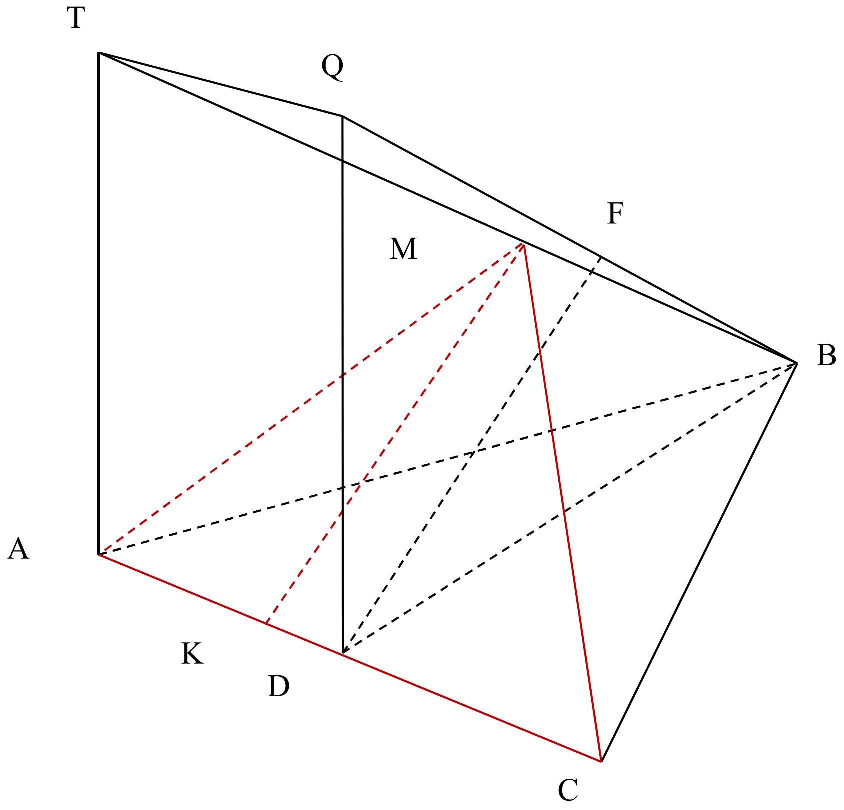

Рис. 1. Чертеж к решению задачи первым методом

Проведем $MK \perp AC$, тогда искомая площадь вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |MK|$.

Поскольку длина $|AC|$ фиксирована, то значение площади S будет минимальным тогда и только тогда, когда длина отрезка MK минимальна. В свою очередь, длина отрезка MK минимальна тогда и только тогда, когда MK является расстоянием между скрещивающимися прямыми TB и AC.

Таким образом, задача свелась к нахождению расстояния между двумя скрещивающимися прямыми. Отметим, что данный способ не требует нахождения местоположения точки M на ребре TB.

Найдем расстояние между скрещивающимися прямыми TB и AC.

Проведем $BD \perp AC$, тогда $|AD| = |CD| = 2\sqrt{3}$, (т.к. ΔABC – равносторонний, высота в нем совпадает с медианой и биссектрисой).

Проведем DQ $\|$ AT, $|DQ| = |AT| = 6\sqrt{3}$.

Тогда TQ $\|$ AT, $|TQ| = |AD| = 2\sqrt{3}$.

Обозначим за α плоскость (DBQ).

Так как $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp DQ \end{cases} \Rightarrow AC \perp \alpha;\ \ \text{П}p_\alpha AC = D;\ \ \text{П}p_\alpha BT = BQ.$

Проведем $DF \perp BQ$. Так как $DF \in \alpha \Rightarrow DF \perp AC$, т.е. DF и является расстоянием между скрещивающимися прямыми AC и BT.

ΔABC – равносторонний, следовательно $|BD| = |AB| \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6.$

По теореме Пифагора $|BQ| = \sqrt{|BD|^2 + |DQ|^2} = \sqrt{36+108} = 12.$

Т.к. $DQ \perp BD$ $S_{\Delta BDQ} = \dfrac{1}{2}|BD| \cdot |DQ| = \dfrac{1}{2}|BQ| \cdot |DF|$, откуда $|DF| = \dfrac{|BD| \cdot |DQ|}{|BQ|} = \dfrac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{12} = 3\sqrt{3}.$

Тогда $S_{\min} = \dfrac{1}{2}|AC| \cdot |DF| = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 18.$

В общем виде алгоритм решения задач данного типа первым методом можно представить таким образом:

1) записывается формула для вычисления площади сечения в общем виде;

2) выясняется, что минимальная площадь сечения достигается в случае, если длина высоты полученного в сечении треугольника является расстоянием между определенными скрещивающимися прямыми;

3) находится это расстояние;

4) находится минимальная площадь сечения.

<u>Второй метод решения</u>.

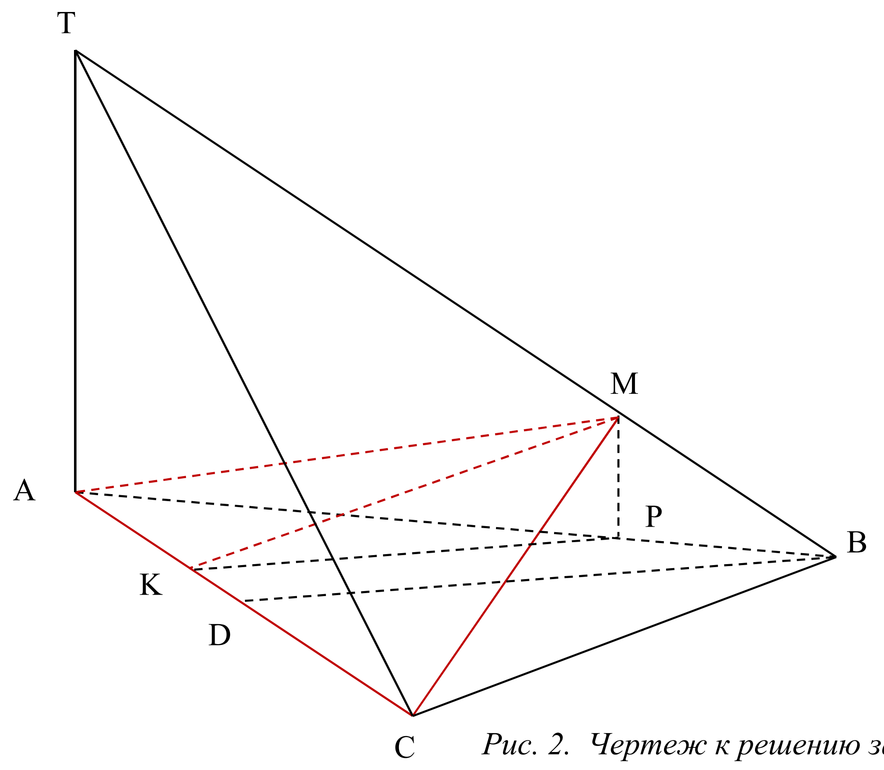

Рис. 2. Чертеж к решению задачи вторым методом

Пусть плоскость (AMC) – искомое сечение (рис. 2).

Проведем $MK \perp AC$, тогда искомая площадь вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |MK|$.

Проведем $MP \parallel TA \Rightarrow MP \perp (ABC) \Rightarrow MP \perp AB$.

Проведем $PK \perp AC$, $BD \perp AC$, тогда $|AD| = |CD| = 2\sqrt{3}$,

$|BD| = |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6,$ т.к. ΔABC – равносторонний.

Обозначим $|BP| = x,\ x \in \left[0; 4\sqrt{3}\right]$, тогда $|AP| = 4\sqrt{3} - x$.

Из подобия ΔAKP и ΔABD получаем:

$$\frac{|PK|}{|BD|} = \frac{|AP|}{|AB|} \Rightarrow |PK| = \frac{|BD| \cdot |AP|}{|AB|} = \frac{6 \cdot (4\sqrt{3} - x)}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\sqrt{3} - x).$$

Из подобия ΔBMP и ΔBTA получаем:

$$\frac{|PM|}{|AT|} = \frac{|BP|}{|AB|} \Rightarrow |PM| = \frac{|AT| \cdot |BP|}{|AB|} = \frac{6\sqrt{3}x}{4\sqrt{3}} = \frac{3x}{2}.$$

По теореме Пифагора $|MK|=\sqrt{|PK|^2+|MP|^2}=$

$$=\sqrt{\frac{3}{4}(48-8\sqrt{3}x+x^2)+\frac{9x^2}{4}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+12}.$$

Тогда $S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|MK|=$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+12}=6\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+12}.$$

Поскольку величина S не может быть отрицательной, то $S-\min \Leftrightarrow S^2-\min$.

Обозначим $S^2=f(x)=36(x^2-2\sqrt{3}x+12)$.

Найдем $f'(x)=36(2x-2\sqrt{3})=0 \Rightarrow x=\sqrt{3}$.

Убедимся, что $x=\sqrt{3}$ является точкой минимума функции $f(x)$.

Для этого найдем знаки производной функции $f'(x)$ на интервалах $(0,\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3},4\sqrt{3})$ (рис. 3).

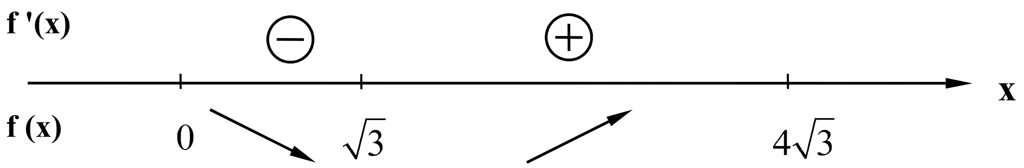

Рис. 3. Исследование характера поведения функции с помощью производной

Таким образом, $x=\sqrt{3}$ является точкой минимума функции $f(x)$. Поэтому $S_{\min}=\sqrt{f(\sqrt{3})}=6\sqrt{3-6+12}=6\sqrt{9}=18,$ т.е. $S_{\min}=18$.

В общем виде алгоритм решения задач данного типа вторым методом можно представить таким образом:

1) вводится неизвестная величина – расстояние от точки пересечения искомого сечения с соответствующим ребром пирамиды до одной из его вершин;

2) составляется функция для вычисления площади искомого сечения, зависящая от введенной неизвестной величины;

3) вычисляется производная этой функции и проверяется, что при значении производной, равной нулю, данная функция достигает своего минимума;

4) для вычисления площади сечения в функцию подставляется найденное значение неизвестной величины и вычисляется минимальное значение площади сечения.

<u>Третий метод решения</u>.

Рис. 4. Чертеж к решению задачи третьим методом

Введем в трехмерном пространстве правую декартову систему координат. Начало координат совпадает с точкой A, ось OZ совместим с высотой TA, ось OY – с ребром основания AB, ось OX проведем перпендикулярно осям OY и OZ. Ось OX будет лежать в плоскости основания пирамиды (рис. 4).

Пусть плоскость (AMC) – искомое сечение. Тогда искомая площадь вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AC}\times\overline{AM}\right]\right|$ (половина длины векторного произведения векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AM}$. Найдем координаты этих векторов.

Проведем MP ‖ TA. Обозначим $|BP|=x$, тогда $|AP|=4\sqrt{3}-x$.

Из подобия ΔBMP и ΔBTA получаем:

$$\frac{|PM|}{|AT|}=\frac{|BP|}{|AB|}\Rightarrow|PM|=\frac{|AT|\cdot|BP|}{|AB|}=\frac{6\sqrt{3}x}{4\sqrt{3}}=\frac{3x}{2},$$

а вектор $\overline{AM}$ имеет координаты $\overline{AM}=(0;4\sqrt{3}-x;\frac{3x}{2})$.

Так как ΔABC – равносторонний, $\angle BAC=60°$, координаты вектора $\overline{AC}$ следующие $\overline{AC}=(4\sqrt{3}\cos 30°;4\sqrt{3}\sin 30°;0)=(6;2\sqrt{3};0)$.

Найдем векторное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AM}$

$$\left[\overline{AC}\times\overline{AM}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 6 & 2\sqrt{3} & 0\\ 0 & 4\sqrt{3}-x & \frac{3x}{2}\end{vmatrix}=(3\sqrt{3}x;-9x;24\sqrt{3}-6x).$$

Вычисляем его длину

$$\left|\left[\overline{AC}\times\overline{AM}\right]\right|=\sqrt{27x^2+81x^2+1728-288\sqrt{3}x+36x^2}=12\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+12},$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AC}\times\overline{AM}\right]\right|=6\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+12}.$$

Далее проводим такие же действия, как и в предыдущем способе, и получаем, что $S_{\min}=18$.

В общем виде алгоритм решения задач данного типа третьим методом можно представить таким образом:

1) вводится декартова система координат в трехмерном пространстве;

2) вводится неизвестная величина и через нее записываются координаты всех точек, используемых при решении задачи;

3) используя векторное произведение двух векторов, составляется функция для нахождения площади искомого сечения, зависящая от введенной неизвестной.

Далее выполняются пункты 3), 4) второго метода.

Таким образом, третий метод решения поставленной задачи является комбинацией методов векторной алгебры и математического анализа.

Заключение

Отметим, что представленные методы решения стереометрических задач на нахождение экстремальных значений достаточно близки по трудоемкости. Учащиеся, обладающие хорошо развитым пространственным воображением, выбирают, как правило, первый способ решения. Второй способ часто предпочитают учащиеся, хорошо освоившие алгебру и основы математического анализа. Учащиеся школ с углубленным изучением математики, знакомые с основами векторной алгебры, предпочитают третий способ.

Поэтому целесообразно ознакомить школьников с различными методами решения задач данного типа и оставить выбор способа решения на их усмотрение.

Список литературы

1. Кочагин В.В., Кочагина М.Н. ЕГЭ 2018. Математика: тематические тренировочные задания. М.: ЭКСМО, 2017. 208 с.
2. Рязановский А.Р., Мирошин В.В. ЕГЭ 2018. Математика. Решение задач. Сдаем без проблем! М.: ЭКСМО, 2017. 498 с.
3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. М.: Просвещение, 2014. 255 с.
4. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 10-11 классов. М.: Просвещение, 2014. 175 с.
5. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. 11 класс В 2-х частях. Ч.1. Учебник (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2012. 287 с.
6. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс: в двух частях. Ч.2: задачник для общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2004. 315 с.
7. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики М.Л. Галицкий. М.: Просвещение, 1999. 271 с.
8. Мищенко О.В. Применение векторной алгебры для решения стереометрических задач повышенной сложности. Открытый урок первое сентября. [Электронный ресурс]. URL: https://открытыйурок.рф/статьи/635027/ (дата обращения: 10.08.2019).

9. Клековкин Г.А. Решение геометрических задач векторным методом. Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. 180 с.

10. Тихонова Т.Г. Векторные методы решения задач по стереометрии. Научному прогрессу – творчество молодых // Вестник Поволжского государственного технологического университета. 2018. № 1. С. 28-30.