УДК 372.851

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ВОЗВРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Самсикова Н.А.[1], Прусенко Ф.Н.[1]

[1]*ФГБОУ ВО «Сахалинский государственный университет», Южно-Сахалинск, e-mail: Kaf_math@sakhgu.ru*

Скорость решения той или иной задачи по математике – это залог быстрого усвоения материала, умение быстро анализировать ту или иную ситуацию достаточно продуктивно. Быстрота решения задачи зависит не только от умственных способностей решающего, но и от способа, посредством которого предпринято решение. Умение владеть несколькими способами решения той или иной задачи также является отличным залогом успешного обучения математике. Достаточно емким по вычислительным выкладкам являются симметрические возвратные уравнения (СВУ), тем более если уравнение имеет нестандартно высокую степень. Существуют способы решения данных уравнений, которые представлены в различной учебной и методической литературе, но тем не менее решения громоздки. Решение вопроса по упрощению вычислений рассматривается в данной статье. При решении упомянутых уравнений часто применяется метод замены переменной и, как следствие, переход к новому уравнению относительно новой, введенной переменной. Этот процесс занимает много времени, особенно для уравнений больших степеней. Была предпринята попытка рационализировать данный процесс, и она оказалась успешной. Было выявлено рекуррентное соотношение между получаемыми многочленами от новой переменной, которое и легло в основу рационализации данного процесса. В результате чего получен оптимизированный метод решения СВУ, который может пополнить «копилку» различных методов для всех тех, кто так или иначе связан с необходимостью решать данные задачи, от школьников до студентов, желающих разносторонне развиваться, изучая алгебру и математику в целом, развивая более широкое представление о разнообразии методов. Обоснование и непротиворечивость данного метода также изложено в данной статье.

Ключевые слова: уравнение, возвратное уравнение, симметрическое уравнение, методы решения уравнений.

METHODS FOR SOLVING SYMMETRIC RECIPROCAL EQUATIONS

Samsikova N.A.[1], Prusenko F.N.[1]

[1]*Sakhalin State University, Yuzhno-Sakhalinsk, e-mail: Kaf_math@sakhgu.ru*

Existing solution methods for symmetrical reciprocal equation of the highest degree are too cumbersome and laborious. Since the replacement method is often used as a means of solving the reciprocal equation, the transformation to new reciprocal equation with new variable there occurs. In this case, solving process can take a lot of time especially if the reciprocal equation of large degree is considered. All this has pushed the research for new equation solving methods. The problems presented in the article are connected with the issue of rationalization of the solving process and theoretical justification for one of the solving methods for symmetrical reciprocal equation that can significantly simplify the process of solving such equations. Recurrence equation between polynomials obtained after imputation of new variable forms the basis of the rationalization process. As a result, an optimized method for solving symmetrical reciprocal equations has been found. The article also deals with the justification and consistency of the method that helps to simplify the process of solving symmetrical reciprocal equation of the highest degrees. The new method of solving symmetrical reciprocal equation will provide not only students, school and universities teachers within their professional field but all people who want to develop their knowledge through algebra studies and mathematics developing a wider understanding of the variety of methods, with new information about symmetrical reciprocal equation solving practices. Utilizing a range of methods for solving various mathematical problems assists to expand the mathematical horizons and opportunities to optimize the decision making process.

Keywords: equation, reciprocal equations, symmetric equation, methods for solving equations.

Решение возвратных уравнений высоких степеней всегда вызывает определенные трудности как у школьников, так и у студентов педагогических вузов. Видимо, поэтому в школьных учебниках рассматриваются возвратные уравнения только третьей и четвертой степеней [1, с. 67-68; 2, с. 132-141; 3, с. 235], также в учебниках для педагогических вузов и школьных учебниках повышенной сложности рассматриваются возвратные уравнения только третьей и четвертой степеней, реже – пятой степени и выше [4, с. 116; 5, с. 68; 6, с. 59]. В таблице представлены основные методы, которые используются для решения возвратных уравнений - это замена неизвестного и разложение на множители.

Методы решения возвратных уравнений

Авторы	**Источники**	**Методы**	**Алгоритм**
Виленкин Н.Я. Виленкин А.Н., Сурвилло Г.С.	Алгебра. Учебник для общеобразовательных школ с углубленным изучением математики. 8 класс.	Введение новой переменной	1) разделить обе части уравнения на x^2; 2) сгруппировать члены с одинаковыми коэффициентами; 3) сделать подстановку $z = x + \frac{1}{x}$, $z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, применив формулы сокращенного умножения; 4) полученное уравнение решить известными способами (разложение на множители)
Виленкин Н.Я.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл.: учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень)		
Муравин Г.К.	Алгебра и начала математического анализа. 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений		
Шахмейстер А.Х.	Уравнения	Введение новой переменной Разложение на множители	В общем виде, для уравнения степени $2n$, разделить обе части уравнения на x^n: 1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) полученное уравнение меньшей степени решить известными способами. Для уравнения нечетной степени: 1) разложить на множители, один из которых будет $(x+1)$; 2) исходное уравнение разделить на $(x+1)$; 3) полученное уравнение четной степени решить известным способом
Соловьева Л.А.	Нестандартные методы решения возвратных и симметрических уравнений		

В основе использования этих методов лежит следствие теоремы Безу [7, с. 28] и применение формул сокращенного умножения высших степеней, что связано с громоздкими преобразованиями многочленов, представленными в левой части уравнения.

В данной статье предпринята попытка обоснования еще одного метода решения возвратных симметрических уравнений, который был обнаружен авторами в процессе исследования многочленов, получающихся в результате замены переменной.

Цель исследования – разработать и теоретически обосновать новый метод решения симметрических возвратных уравнений.

Материал и методы исследования

Для достижения поставленной цели были изучены теоретические вопросы обоснования процесса решения уравнений высших степеней, проведен логико-математический анализ задачного материала, представленного в школьных учебниках и в учебниках для педагогических вузов. Также был проведен анализ публикаций, связанных с рассмотрением различных методов решения уравнений высших степеней, в частности методов решения симметрических возвратных уравнений.

Результаты исследования и их обсуждение

Зная, что корнем любого симметрического возвратного уравнения (СВУ) нечетной степени является (-1) (в силу симметричности коэффициентов), имеем возможность представить СВУ в следующем виде:

$(x+1)\left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_{\frac{m}{2}+1}x^{\frac{m}{2}+1} + b_{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}} + b_{\frac{m}{2}-1}x^{\frac{m}{2}-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m\right) = 0$, причем степень уравнения $f_m(x)$ четная.

Далее, как известно, применяется следующий прием, а именно, умножаем обе части уравнения

$b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_{\frac{m}{2}+1}x^{\frac{m}{2}+1} + b_{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}} + b_{\frac{m}{2}-1}x^{\frac{m}{2}-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m = 0$ на множитель $\frac{1}{x^{\frac{m}{2}}}$.

После преобразований получим уравнение (1)

$b_m\left(x^{\frac{m}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{m}{2}}}\right) + b_{m-1}\left(x^{\frac{m-2}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{m-2}{2}}}\right) + \cdots + b_{\frac{m}{2}+2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b_{\frac{m}{2}+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + b_{\frac{m}{2}} = 0$, для решения, которого воспользуемся методом замены переменной:

$\left(x + \frac{1}{x}\right) = t.$

Возникает задача, заключающаяся в выражении $\left(x^i + \frac{1}{x^i}\right)$ через t,

где $i = \overline{2, \ldots \frac{m}{2}}$ зная, что $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$.

Существует способ выражения, который сейчас будет рассмотрен.

Зная, что $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$, выразим $\left(x^i + \frac{1}{x^i}\right)$, $i = \overline{2, \ldots \frac{m}{2}}$ через переменную t:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \Rightarrow t^2-2$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3+3x+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3} \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow t^3-3t$$

и т.д.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{2}} = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_{\frac{m}{2}}^{i} x^{\frac{m}{2}-i}\frac{1}{x^i} \Rightarrow x^{\frac{m}{2}}+\frac{1}{x^{\frac{m}{2}}} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{2}} - \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{\frac{m}{2}}^{i} x^{\frac{m}{2}-i}\frac{1}{x^i} \Rightarrow f_{\frac{m}{2}}(t)$$

где $C_{\frac{m}{2}}^{i} = \frac{\frac{m}{2}!}{i!\left(\frac{m}{2}-i\right)!}$, $i = \overline{2, \dots \frac{m}{2}}$ (биноминальный коэффициент) [8, с. 144-145].

Очевидно, что при достаточно больших значениях степеней расчеты становятся неудобными и громоздкими, что существенно замедляет процесс решения. Возникает вопрос, возможно ли осуществить процесс нахождения многочленов $f_i(t)$ более простым и удобным способом? Ответ положительный. Был получен достаточно простой способ выражения, который сейчас будет рассмотрен.

Для начала составим ряд разложений, например до 4-й степени, данным способом, не заменяя $\left(x+\frac{1}{x}\right)$, на переменную t.

$$x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$x^4+\frac{1}{x^4} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2$$

Заметим, что

$$x^4+\frac{1}{x^4} = \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

Рассмотрим данную закономерность в общем виде:

$$x^i+\frac{1}{x^i} = \left(x^{i-1}+\frac{1}{x^{i-1}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(x^{i-2}+\frac{1}{x^{i-2}}\right)$$

$$\left(x^{i-1}+\frac{1}{x^{i-1}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(x^{i-2}+\frac{1}{x^{i-2}}\right) = x^i + x^{i-2} + \frac{1}{x^{i-2}} + \frac{1}{x^i} - x^{i-2} - \frac{1}{x^{i-2}} = x^i + \frac{1}{x^i}$$

Получили формулу (2):

$$x^i+\frac{1}{x^i} = \left(x^{i-1}+\frac{1}{x^{i-1}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(x^{i-2}+\frac{1}{x^{i-2}}\right) \tag{2}$$

Так как левые и правые части равны, то данная формула верна и для правой части. Таким образом, если положим, что $\left(x+\frac{1}{x}\right) = t$, то получим

$$x^{i-2}+\frac{1}{x^{i-2}} \Rightarrow f_{i-2}(t)$$

$$x^{i-1} + \frac{1}{x^{i-1}} \Rightarrow f_{i-1}(t)$$

$$x^{i} + \frac{1}{x^{i}} \Rightarrow f_{i}(t)$$

Пользуясь формулой (2), получим формулу (3)

$$f_i(t) = f_{i-1}(t) \cdot t - f_{i-2}(t) \quad (3)$$

Также можно представить данную закономерность в форме определителя:

$$f_i(t) = \begin{vmatrix} f_{i-1}(t) & f_{i-2}(t) \\ 1 & t \end{vmatrix}$$

Таким образом, можем заключить то, что вполне достаточно для нахождения многочлена от переменной t некоторой степени знать многочлены двух предыдущих степеней. Но возникает вопрос, как определить многочлен от переменной t для $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$, не пользуясь формулой квадрата суммы, а пользуясь данной закономерностью, то есть формулой (3).

Действительно, мы полагаем, что $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$, но тогда требуется для нахождения $f(t)$ от $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ многочлен предыдущей степени, то есть многочлен, соответствующий $\left(x^0 + \frac{1}{x^0}\right)$. Очевидно, что это есть число 2 (т.е. многочлен нулевой степени, в данном случае являющийся постоянной 2).

Докажем этот факт.

Найдем $f(t)$ для $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$, пользуясь формулой квадрата суммы.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

Зная, что $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$, получим $t^2 - 2$.

Пользуясь формулой (3), найдем $f(t)$ для $\left(x^0 + \frac{1}{x^0}\right)$:

$$t^2 - 2 = \begin{vmatrix} t & X \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - X \Rightarrow X = 2.$$

Таким образом, зная, что $f_0(t) = 2$ и $f_1(t) = t$, мы имеем возможность найти многочлены всех последующих степеней по формуле (3). Таким образом, заметив рекуррентное соотношение, использовали возможность его применения для рационализации решения.

Как мы можем видеть, результатом проделанной работы является оптимизированный метод получения многочленов от новой переменной, что значительно сокращает время решения СВУ.

Рассмотрим пример.

Требуется решить уравнение:

$$4x^{11}+4x^{10}+21x^9+21x^8+17x^7+17x^6+17x^5+17x^4+21x^3+21x^2+4x+4=0.$$

Решение.

$$(x+1)(4x^{10}+21x^8+17x^6+17x^4+21x^2+4)=0$$

$$4x^{10}+21x^8+17x^6+17x^4+21x^2+4=0 \left|\cdot\frac{1}{x^5}\right.$$

$$4x^5+21x^3+17x+17\frac{1}{x}+21\frac{1}{x^3}+4\cdot\frac{1}{x^5}=0$$

$$4\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+21\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+17\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

тогда

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(t^2-2)t-t=t^3-3t$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=(t^3-3t)t-(t^2-2)=t^4-4t^2+2$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=(t^4-4t^2+2)t-(t^3-3t)=t^5-5t^3+5t$$

получим

$$4(t^5-5t^3+5t)+21(t^3-3t)+17t=0$$

$$4t^5+t^3-26t=0$$

$$t(4t^4+t^2-26)=0$$

$$t_1=0$$

решим биквадратное уравнение:

$$t^2=y \Rightarrow 4y^2+y-26=0$$

$$y_1=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-26)}}{8}=\frac{-1+\sqrt{105}}{8}$$

$$y_2=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-26)}}{8}=\frac{-1-\sqrt{105}}{8}$$

откуда получим:

$$t_2=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}}$$

$$t_3=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}}$$

$$t_4 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i$$

$$t_5 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i$$

Далее осуществим обратную замену переменной, зная, что $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$.

$$x + \frac{1}{x} = t | \cdot x$$

$$x^2 - tx + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{t \pm \sqrt{t^4 - 4}}{2} = \frac{1}{2}\left(t \pm \sqrt{t^2 - 4}\right)$$

Найдем корни исходного уравнения:

$$x + 1 = 0$$

$$x_1 = -1$$

При $t_1 = 0$:

$$x_2 = i, x_3 = -i$$

(корни могут принадлежать также и области комплексных чисел),

при $t_2 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}}$:

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}} + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}}\right)^2 - 4}\right)$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}} - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}}\right)^2 - 4}\right)$$

При $t_3 = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}}$:

$$x_6 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}} + \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}}\right)^2 - 4}\right)$$

$$x_7 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}} - \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{105}}{8}}\right)^2 - 4}\right)$$

При $t_4 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i$:

$$x_8 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i\right)^2 - 4}\right)$$

$$x_9 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i\right)^2 - 4}\right)$$

При $t_5 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i$:

$$x_{10} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i + \sqrt{\left(\sqrt{-\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i\right)^2 - 4}\right)$$

$$x_{11} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i - \sqrt{\left(\sqrt{-\frac{1+\sqrt{105}}{8}}i\right)^2 - 4}\right)$$

Как мы можем видеть, процесс выражения переменной x через многочлены от переменной t значительно прост и не занимает большого количества времени.

Обобщим **алгоритм** решения данных СВУ нечетной степени.

Дано: $f_n(x) = 0$

Решение:

1) $(x+1)f_{n-1}(x) = 0$

2) $f_{n-1}(x) = 0 \Big|\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}}$

3) заменяя $\left(x^i + \frac{1}{x^i}\right)$, на многочлены $f_i(t)$, получим новое уравнение:

$$a_{n-1} \cdot f_{n-1}(t) + \cdots + a_k \cdot f_{n-k}(t) + \cdots + a_0 = 0$$

Обозначим данное уравнение $g(t)$=0.

Получим корни уравнения $g(t)$ =0: $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$.

Далее находим корни исходного уравнения $f_{n-1}(x) = 0$ по формуле:

$$x_k = \frac{1}{2}\left(t_i \pm \sqrt{t_i^2 - 4}\right), k = 2, \ldots, n.$$

Понятно, что каждому значению t_i соответствует пара значений x (учитывая кратности корней).

В конечном счете получим множество корней исходного уравнения: $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Выводы

В итоге мы познакомились еще с одним методом решения возвратных уравнений, который поможет при решении уравнений высших степеней, а также иных расчетов, связанных с заменой переменной.

Считаем, что в целом основное назначение предложенного метода – предоставить возможность каждому студенту или школьнику, интересующемуся математикой, решать возвратные уравнения разными методами, при этом оценить возможности каждого из них. Все это будет способствовать формированию исследовательской компетенции обучающихся, так как создаются условия для сознательного освоения материала, проводится теоретическое обоснование выбора предложенных методов, что влечет за собой расширение знаний, формирование соответствующих умений и навыков. Таким образом, предложенный метод может оказаться полезным и для самостоятельной работы школьников, интересующихся математикой, и студентов педагогических вузов, так как на этом материале можно устанавливать связи изучаемых теоретических вопросов с курсом школьной алгебры. Надеемся, что предложенный метод рационализации решения симметрических возвратных уравнений привлечет внимание и педагогов, работающих в области математического образования.

Список литературы

1. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл.: учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень). 18-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2014. 352 с.
2. Муравин Г.К., Муравина О.В. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл.: учеб. для общеобразоват. Учреждений. 6-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2013. 253 с.
3. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Сурвилло Г.С. Алгебра. Учебник для общеобразовательных школ с углубленным изучением математики. 8 класс. М.: Просвещение, 2010. 303 с.
4. Шахмейстер А.Х. Уравнения. М.: Издательство МЦНМО, СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс», 2011. 264 с.
5. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа: базовый и профил. уровни. М.: Просвещение, 2009. 430 с.

6. Элементарная математика: практикум по решению задач: Учебно-методический комплекс. СПб.: Изд-во РГПУ им А.И. Герцена, 2009. 283 с.
7. Соловьева Л.А. Нестандартные методы решения возвратных и симметрических уравнений // Информация и образование: границы коммуникаций. 2014. № 6 (14). С. 324-327.
8. Гисин В.Б. Дискретная математика: учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2019. 383 с.