УДК 372.851

УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА УЧАЩИХСЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССОВ, СВЯЗАННАЯ С РЕШЕНИЕМ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Далингер В.А.[1]

[1]ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет», Омск, e-mail: dalinger@omgpu.ru

В статье рассматривается одна из важнейших проблем современного периода школьного образования – организация учебно-исследовательской работы учащихся профильных математических классов по математике, отмечается ее развивающая функция, связанная в первую очередь с формированием универсальных учебных действий (УУД), таких как личностные, регулятивные, познавательные (логические УУД, общеучебные УУД, формирование межпредметных понятий, математическое моделирование); проводится экскурс в историю развития теории конических сечений (этот материал может быть использован на вводном занятии математического кружка, посвященном изучению кривых второго порядка); предложен ряд задач по теории конических сечений, которые могут послужить материалом для проведения учебно-исследовательской работы (рассмотрены задачи, в которых объектом исследования является эллипс, описывается способ построения эллипса с помощью циркуля и линейки, отличный от уже известных, и дается логическое обоснование этого способа); рассматриваются и другие планиметрические задачи, в которых затронуты вопросы, связанные с понятием «эллипс», они могут быть предложены школьникам, обучающимся в профильных математических классах. Большое внимание уделено вписанным и описанным в эллипс геометрическим фигурам и дана сравнительная характеристика площадей этих фигур. Материал, приведенный в статье, окажет существенную помощь учителю математики в организации учебно-поисковой работы учащихся математических классов по геометрии. Такая деятельность учащихся классов математического профиля продемонстрирует их способности и сформированные исследовательские умения; эта учебно-поисковая работа школьников формирует качества их творческой деятельности и напрямую связана с развитием познавательного интереса как к различным видам математической деятельности, так и к различным аспектам содержания математики.

Ключевые слова: учебно-поисковая работа учащихся, история развития теории конических сечений, геометрические построения циркулем и линейкой, эллипс, охватывающий эллипс, геометрическое место точек.

TRAINING AND RESEARCH WORK OF STUDENTS OF MATHEMATICAL CLASSES RELATED TO THE SOLUTION OF SOME PROBLEMS ON THE CONIC SECTION THEORY

Dalinger V. A.[1]

[1]FGBOU VO «Omsk State Pedagogical University», Omsk, e-mail: dalinger@omgpu.ru

The article considers one of the most important problems of the modern period of school education – organization of educational and research work of students of specialized mathematical classes in mathematics, notes its developing function, primarily related to the formation of UDS, such as personal, regulatory, cognitive (logical UDS, general medical UDS, formation of interprandial concepts, mathematical modeling); An excursion is carried out in the history of the development of the theory of conic sections (this material can be used in the introductory lesson of the mathematical circle devoted to the study of second-order curves); A number of problems on the theory of conic sections are proposed, which can serve as a material for carrying out educational and research work (problems in which the object of research is an ellipse are considered, a method of constructing an ellipse by means of a circular and a ruler, different from those already known, is described, and a logical justification of this method is given); Consideration is given to other planimetric tasks that address issues related to the concept of ellipse, and they can be offered to students studying in specialized mathematical classes; Much attention is paid to the geometric figures inscribed and described in the ellipse and a comparative characteristic of the areas of these figures is given. The material given in the article will significantly help the teacher of mathematics in the organization of educational and search work of students of mathematical classes on geometry. Such educational and search work of students of mathematical classes will demonstrate their abilities and formed research skills; This educational and search work of students forms the qualities of their creative activity and is directly related to the formation of cognitive interest, both in various types of mathematical activity, and in various aspects of mathematics content.

Keywords: educational and search work of pupils, the history of the development of the theory of conic sections, geometric constructions by compasses and rulers, an ellipse enclosing an ellipse, a geometric place of points.

Основными проблемами школьного образования в настоящее время являются немотивированность учебно-познавательной деятельности учащихся, их слабое стремление к познанию, отсутствие познавательного интереса и др. Сейчас идет активный поиск выходов из создавшегося положения.

Образовательная теория и школьная практика показывают, что многие проблемы могут быть решены не столько за счет корректировки содержания обучения, сколько за счет использования активных методов обучения, таких как метод проектов, мозговой штурм, кейс-метод и т. д.

Анализ школьной практики и передовых технологий обучения показывает, что значимой является организация учебно-исследовательской работы учащихся, в ходе которой школьники овладевают навыками и способами умственной деятельности, систематической самостоятельной поисковой деятельности.

Учебно-исследовательская деятельность учащихся по математике выполняет как обучающую, так и развивающую функцию, и это есть результат того, что настоящая деятельность воспитывает у обучающихся осознанное отношение к своему труду, формирует качество творческой деятельности и напрямую связана с развитием познавательного интереса как к различным видам математической деятельности, так и к различным аспектам содержания математики.

По организации учебно-исследовательской деятельности учащихся по математике читатель найдет материал в работах [1–3].

Подходящей темой для организации учебно-исследовательской работы учащихся является тема «Конические сечения». В данной статье мы ставим задачу провести исторический экскурс в развитие темы «Конические сечения» (этот материал может быть использован на вводном занятии математического кружка, посвященном изучению кривых второго порядка), а также предложить ряд задач по теории конических сечений, которые могут послужить материалом для проведения учебно-исследовательской работы (предложены задачи, в которых объектом исследования является эллипс).

Материалы и методы исследования

Ученые-математики Древней Греции активно занимались исследованиями задач, которые впоследствии стали называться знаменитыми задачами древности: об удвоении куба, о трисекции угла, о квадратуре круга. Работа с ними вывела ученых на проблему, связанную с изучением линий, отличных от прямых и окружностей: эллипс, парабола, гипербола.

Менехм (IV в. до н.э.) предложил для решения этих задач конические сечения – это такие кривые, которые получаются сечением конуса плоскостью, перпендикулярной одной из образующих (получаются три различные кривые в зависимости от того, какой конус сечется плоскостью – остроугольный, прямоугольный или тупоугольный). Позднее Аполлоний (III в. до н.э.) назвал их эллипсом, параболой, гиперболой. Он проводил сечения в произвольном конусе плоскостью под любым углом к оси конуса.

Основателем современного учения о кривых по праву считают великого немецкого художника и ученого А. Дюрера (1471–1528 гг.). В его сочинениях изложены основания геометрии и теории перспективы; подробно рассмотрено учение о правильных многогранниках; предложены решения знаменитых задач древности (скорее всего следует сказать – показана невозможность их решения с помощью циркуля и линейки); дана теория кривых линий.

Одно сечение конуса плоскостью называется эллипсом (эта фигура получается в тех случаях, когда секущая плоскость расположена под разными углами к оси конуса). На рисунке 1 приведено такое сечение.

Ссылаясь на книгу Эрика Т. Белла «Математика – царица и служанка наук», можно отметить, что круг и окружность нас привлекают с первого взгляда своей простотой, но при пристальном изучении различных кривых можно прийти к выводу, что идеальная пустота круга и окружности уступает тем сведениям, которые щедро дарит эллипс.

Среди древних греков, изучавших кривые второго порядка, были Менехм и Аполлоний Пергский. Их исследования показали, что после окружности эллипс является простейшей фигурой. Ученые прилагали усилия, дабы дать эллипсу определения: одни шли путем составления соответствующей формулы, задающей эллипс, другие же за основу определения брали существенное свойство эллипса.

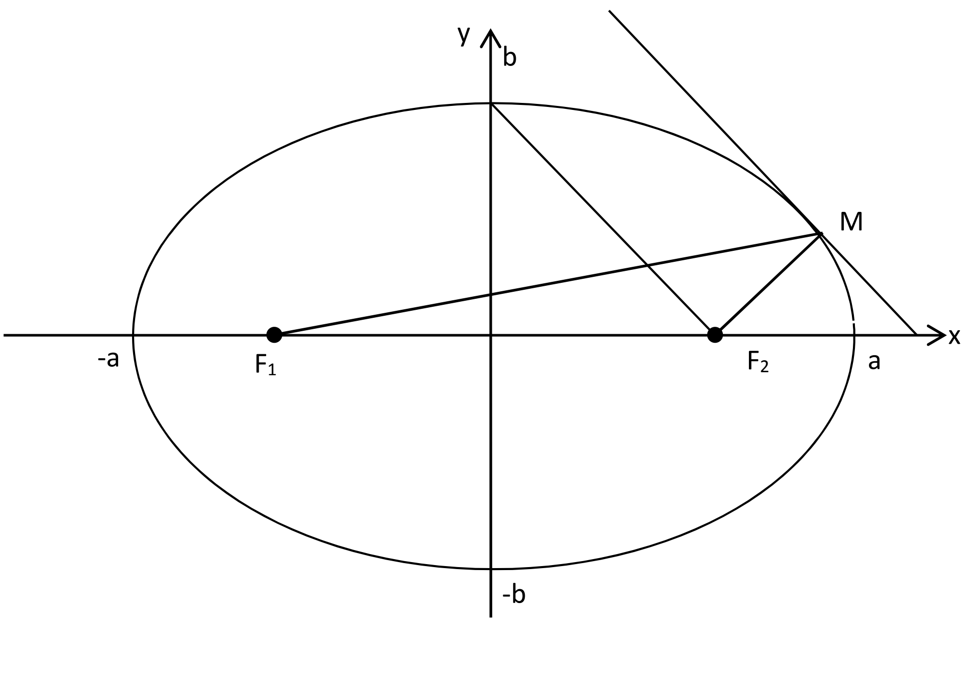


Рис. 1. Эллипс

На рисунке 1 показан способ построения эллипса, основанный на его главном свойстве: расстояние от точек эллипса до его двух фокусов есть величина постоянная.

На рисунке 2 показан способ построения эллипса с помощью двух кнопок, на которые надета петля из нитки; двигая карандаш вокруг кнопок, натянув при этом нитку, можно изобразить эллипс.

В реальной жизни мы увидим эллипс в том случае, если стакан с водой наклонить, в результате чего поверхность воды примет форму эллипса [4, 5].

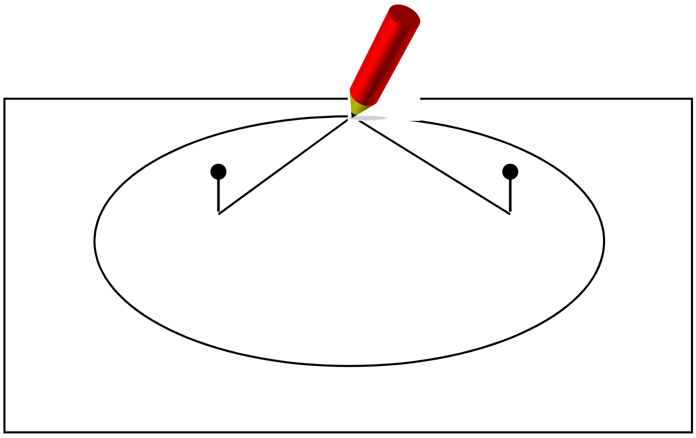


Рис. 2. Построение эллипса с помощью нитки и карандаша

У эллипса есть замечательное оптическое свойство [6]: если из одного фокуса эллипса направить луч света, то он, отражаясь от эллипса, попадет в другой его фокус.

Если вращать эллипс вокруг прямой, проходящей через его фокусы, то получим эллипсоид. Если покрыть его изнутри зеркальным слоем, то эта зеркальная поверхность обладает интересными свойствами:

1) если точечный источник света поместить в одном из фокусов эллипсоида, то лучи, отразившись от стенок эллипсоида, пройдут через его второй фокус;

2) если в одном из фокусов эллипсоида поместить точечный источник света и произвести «мгновенную» вспышку, то через некоторое время после многократных отражений от идеальной зеркальной поверхности эллипсоида все лучи практически сконцентрируются вдоль его большой оси [7, 8].

Результаты исследования и их обсуждение

Существуют способы построения точек эллипса с помощью циркуля и линейки. Например, в справочнике [4] на страницах 60, 61 описаны два способа. Еще один способ – авторский – предлагается в данной статье. Решается следующая задача.

Задача 1. На плоскости заданы точка O и два отрезка с длинами a, b; $a >$ b. Построить точки эллипса с этими полуосями и центром O.

Для решения проведем через точку O две взаимно перпендикулярные прямые, одну из них назовем горизонтальной, другую – вертикальной. На ней отложим отрезок OB = b вверх, вниз отложим отрезок OB_1 = a – b. Берем произвольно точку N между O и B_1, построим окружность с центром в этой точке радиуса a – b. Она пересекает горизонталь в двух точках; выберем ту из них, которая лежит правее O. Обозначим ее через M. Проведем прямую NM. Опишем окружность с центром M радиуса «b». Она пересекает прямую в двух точках. Пусть P – та из них, которая лежит «северо-восточнее». Это и будет искомая точка эллипса.

Меняя N, получим новые точки эллипса.

Рисунок 3а поясняет описанное построение. Рисунок 3б служит для его обоснования, приводимого ниже.

Пусть t – параметр, меняющийся на отрез [0, a–b] и служащий для задания координат точек N, M, P. Положим N (0; –t), тогда M($\sqrt{(a-b)^2-t^2}$; 0).

Запишем уравнение прямой NM в виде

$$y = \frac{tx}{\sqrt{(a-b)^2-t^2}} - t, 0 \le t < a - b \qquad (1)$$

и уравнение окружности $(x - \sqrt{(a-b)^2-t^2}^{\,2} + y^2 = b^2$.

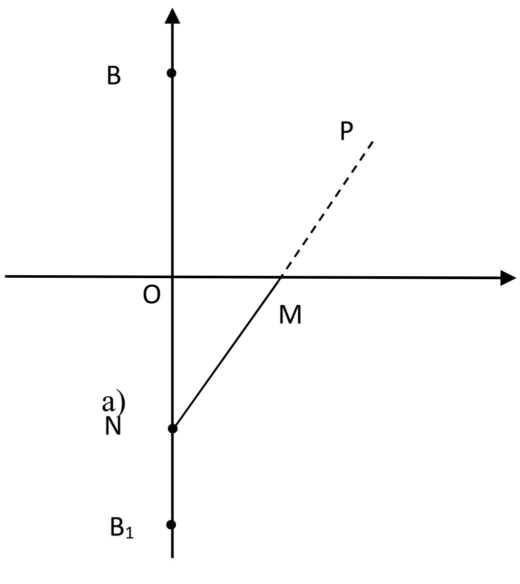
Для нахождения точки P объединим эти уравнения в систему и решим ее.

Систему сведем к квадратному уравнению:

$$\frac{1}{(a-b)^2-t^2}x^2 - \frac{2}{\sqrt{(a-b)^2-t^2}}x + 1 - \frac{b^2}{(a-b)^2} = 0.$$

Опуская детали, укажем его корни:

$$x_{1,2} = \left(1 \pm \frac{b}{a-b}\right)\sqrt{(a-b)^2-t^2}.$$



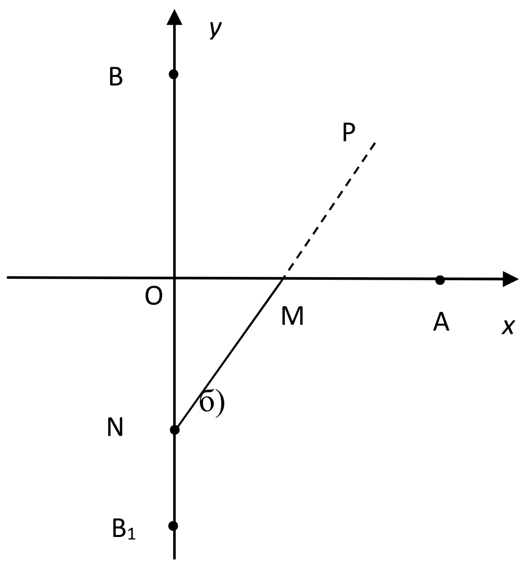


Рис. 3. Построение точек эллипса

Так как абсцисса точки P должна быть больше абсциссы точки M, то подходит только первый корень:

$$x_p = \frac{a}{a-b}\sqrt{(a-b)^2 - t^2}. \qquad (2)$$

Тогда из равенства (1) имеем:

$$y_p = \frac{b}{a-b}t. \qquad (3)$$

Нетрудно проверить, что x_p, y_pудовлетворяют уравнению эллипса:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, так что точка P ему принадлежит при любом

$t \in [0; a-b]$.

Заметим, что при t=0 точка P совпадает с правой вершиной A (a, 0) эллипса, а при t= a – b она переходит в верхнюю границу B (0, b). Таким образом, по формулам (2) и (3) получено параметрическое задание дуги AB эллипса. Расставляя в этих формулах в правых частях нужные знаки, получим параметрические задания остальных дуг.

Правые части равенств (2), (3) можно переписать соответственно в виде:

$$a\sqrt{1 - (\frac{t}{a-b})^2},\ b\,\frac{\mathrm{t}}{a-\mathrm{b}}.$$

Здесь дробь $\frac{\mathrm{t}}{a-\mathrm{b}}$ заключена между 0 и 1, поэтому она является синусом некоторого угла $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Тогда равенства (2), (3) запишутся в виде:

$$x_P = a\cos\varphi, \qquad y_P = b\ sin\varphi.$$

Получим известное параметрическое задание эллипса.

В заключение предлагаем читателям, любителям алгебры, решить следующую задачу.

Запишите систему уравнений, в которой первое уравнение – это уравнение окружности с центром M, радиуса «b», второе уравнение – уравнение эллипса. Докажите, что одним из решений системы является пара (x_P, y_P).

Задача 2. Требуется ответить на проблемный вопрос: «Можно ли эллипс, площадь которого равна $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, вписать в квадрат, сторона которого равна 1?

Решение. Контекст задачи подсказывает, что мы должны найти полуоси a и b того эллипса, который мы хотим вписать (положим полуось a > полуоси b). Не будем рассматривать случаи, когда a = $\frac{1}{2}$ и b = $\frac{1}{2}$.

В основу решения этой задачи положим координатный метод, для чего введем систему координат, такую, какая показана на рисунке 4 (сторона CD квадрата касается дуги эллипса AB в точке K, и это касание происходит в первой четверти плоскости).

Координаты точки касания K мы найдем, решив систему:

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \quad (4)$$

Выразив из первого уравнения переменную y, мы получим квадратное уравнение:

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \frac{\sqrt{2}}{b^2} x + \frac{1}{2b^2} - 1 = 0,$$

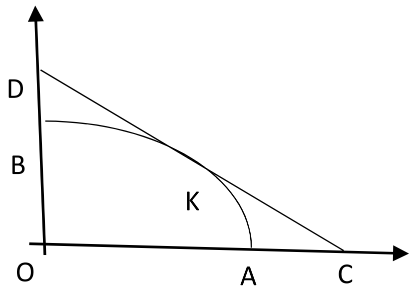


Рис. 4. Рисунок к задаче 2

или $\frac{a^2+b^2}{a^2} x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} - b^2 = 0.$ (5)

Раз мы имеем одну точку касания в первой четверти плоскости, то понятно, что это квадратное уравнение должно иметь один корень, а как известно, это возможно в случае, когда его дискриминант равен нулю.

Дискриминант этого уравнения:

$$D = \frac{2b^2}{a^2}(2a^2 + 2b^2 - 1).$$

Из этого следует, что:

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

При нулевом дискриминанте корнем уравнения (5) является

$$\text{x} = \frac{\sqrt{2}a^2}{2(a^2 + b^2)}.$$

Найдена абсцисса точки касания, равная согласно (5) $\sqrt{2}a^2$. Ее ордината $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - x = \sqrt{2}b^2$.

При $a^2 = \frac{1}{3}, b^2 = \frac{1}{6}$ площадь эллипса:

$$S = \pi ab = \frac{\pi}{\sqrt{18}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$$

На поставленный в задаче 1 вопрос можно ответить утвердительно.

Введем понятие «прямоугольник, охватывающий эллипс»: если у эллипса полуоси a и b, то такой эллипс оказывается вписанным в прямоугольник $2a \times 2b$, и такой прямоугольник мы и назовем охватывающим. Два прямоугольника подобны, если отношения их сходственных сторон равны:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}.$$

Задача 3. С помощью циркуля и линейки в заданный эллипс, полуоси которого a и b, вписать прямоугольник, подобный прямоугольнику, охватывающему эллипс.

Решение. У прямоугольника, охватывающего эллипс, проведем диагонали и обозначим точки пересечения этих диагоналей с эллипсом. Этот эллипс и окажется искомым.

Аргументируем построение такого эллипса. На рисунке 5 изображена система координат, в которой построен квадрат, а в него вписан эллипс. Проведены диагонали квадрата, вертикальная и горизонтальная оси симметрии.

Рассмотрим диагональ, идущую на «северо-восток». Решим систему

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{a}x, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

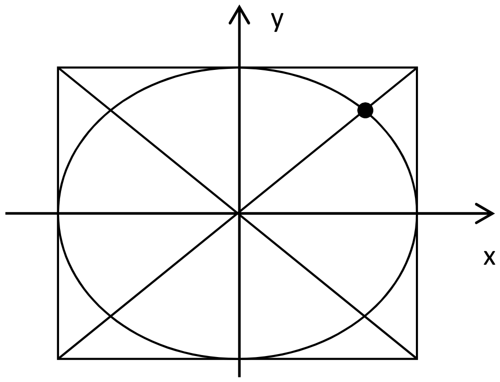


Рис. 5. Рисунок к задаче 3

Одно из решений $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ задает точку в первой четверти плоскости (на рисунке 5 она отмечена). Мы показали построение лишь одной вершины прямоугольника, а читателю предлагаем осуществить построение и узнать координаты трех других вершин прямоугольника.

В построенной задаче 3 в прямоугольник впишем эллипс, который назовем «подобный охватывающему». Эти построения мы продолжим дальше. При этом у всех эллипсов удалим внутренние точки. Получим плоскую фигуру – своеобразный «ковер».

Задача 4. Какова площадь такого «ковра»?

Решение. Обозначим $a_0 = a, b_0 = b, a_n = b_n$ – полуоси эллипса на n-ом шаге процесса.

Согласно задаче 3 $a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{2}}$, $b_n = \frac{b_{n-1}}{\sqrt{2}}$; $n = 1, 2, \dots$.

Площадь «ковра» получается, если из суммы площадей всех прямоугольников вычесть сумму всех эллипсов:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}(2a_n)(2b_n) - \sum_{n=0}^{\infty}\pi a_n b_n$$

Так как $a_n = \frac{a}{2^n}, b_n = \frac{b}{2^n}$, то по формуле суммы всех членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$ имеем:

$S = \frac{4ab}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\pi ab}{1-\frac{1}{2}} = 2ab(4 - \pi)$

Введем обозначение D = 4 – π.

Площадь полученного «ковра» $S = \frac{ab}{1-\lambda^2}D.$ (7)

Задача 5. Доказать следующее оптимальное свойство эллипса: лучи света, исходящие из одного фокуса F_1, после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус F_2 [8].

Решение читатель может найти в учебнике [9] на страницах 167–168 и в наших работах [7, 8].

Заключение

Как показывает практика, предложенные задачи вызывают у учащихся математических классов интерес, их решение формирует у них умения исследовательского характера.

Материал по данной теме читатель найдет в наших работах [10, 11], в статьях журнала «Математика в школе» [12–14] и в работах Е.В. Потоскуева [15, 16].

Список литературы

1. Бородина У.Н. Исследовательская деятельность учащихся на уроках математики – условие развития школьников//Актуальные вопросы современной науки и образования: материалы I Международной научно-практической конференции. М.: Изд-во «Перо», 2016. С.5-7.

2. Курило М.С. Системно-деятельностный подход при обучении математике на примере организации учебно-исследовательской деятельности учащихся // Педагогика и современность.2015. №5(19). С.22-25.

3. Фишман Б.Е., Эйрих Н.В. Сценарное представление исследовательско-учебной деятельности учащихся на примере темы «линейная функция» // Математика в школе. 2017. №7. Электронное приложение на СД – диске.

4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1964. 872 с.

5. Далингер В.А., Грибова Е.Н. Фейерверк замечательных кривых: учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1998 . 87 с.

6. Болтянский В.Г. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы // Квант. 1975. №12. С. 5–12.

7. Далингер В.А, Громов В.А., Симонженков С.Д. По эллипсной орбите: некоторые задачи про эллипс для профильных математических классов // Актуальные проблемы математического образования в школе и вузе: материалы X международной научно-практической конференции. (г. Барнаул, 24-25 октября 2019) / Под науч. ред. И.В. Кисельникова, И.Г. Кулешовой. Барнаул: Изд-во АлтГПУ, 2019. С. 138-145.

8. Далингер В.А. Некоторые задачи про эллипс, ориентированные на учащихся математических классов // Познание и деятельность: от прошлого к настоящему: материалы I Всероссийской междисциплинарной научной конференции (Омск, 5 декабря 2019 года) / Отв. ред. И.П. Геращенко. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2019. С. 392-399.

9. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: учебник для университетов. М.: Наука, 1988. 224 с.

10. Далингер В.А., Симонженков С.Д. О вписывании квадрата в некоторые криволинейные плоские фигуры // Ежемесячный международный научный журнал «International Science Project». 2019. № 23 (Часть 1). С.15-17.

11. Далингер В.А. О площадях ромбов, вписанных в эллипс или описанных вокруг него // Евразийский союз ученых (ЕСУ): Ежемесячный научный журнал. 2019. № 4(61). С. 17-20.

12. Елезарова Н.Г., Понарядова Р.С. О систематизации геометрических знаний учащихся (на примере решения задачи разными способами) // Математика в школе. 2018. №5. С.11-15.

13. Крачковский С.М. Многовариантное визуально-графическое представление математических задач // Математика в школе. 2013. №1. С. 51-63.

14. Крачковский С.М. Изменяем визуальный образ геометрических объектов // Математика в школе. 2015. №8. С. 32-36.

15. Потоскуев Е.В. О принципе наглядности в геометрии // Математика в школе. 2017. №5. С. 18-26.

16. Потоскуев Е.В. О содружестве наглядности и логики рассуждений при решении геометрических задач // Математика в школе. 2018. №3. С. 40-48.