УДК 37.06:373.5

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ С ПАРАМЕТРАМИ

Матвеева Т.А., Светличная В.Б., Мустафина Д.А., Ребро И.В., Рахманкулова Г.А.

Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: vpf@volpi.ru

В статье рассматривается вопрос о подготовке старшеклассников, выбравших в дальнейшем техническое направление обучения, к изучению высшей математики в вузе. Вторая часть Единого государственного экзамена по математике содержит семь задач (13–19). Практика проверки работ показывает, что задачи с параметрами (18) являются наиболее сложными. Они предполагают не применение готовых алгоритмов решения, а обобщение и анализ используемых в математике методов. От сдающих требуются большая гибкость владения курсом математики и большое умение связывать различные его разделы в общую цепь рассуждений. В приведенных задачах сразу оговаривается способ решения и объясняется его преимущество. В конце решения еще раз обращается внимание на тонкие моменты в рассуждениях и предлагаются другие подходы. Во второй и третьей задачах используется один и тот же метод решения – метод монотонности функции, но при этом предполагается его разная реализация. Четвертая и пятая задачи по шагам решения схожи, но разнятся по проверке ограничений для переменной. Рассмотренные задачи можно решать, будучи студентами, с применением знаний по математике, полученных в высшем учебном заведении. Таким образом, статья отражает важный момент формирования математического мышления школьника → студента → будущего специалиста: от готовых методов к творчеству!

Ключевые слова: математическая подготовка, школьники, ЕГЭ, нестандартные задачи.

FEATURES OF METHODS FOR SOLVING NON-STANDARD MATHEMATICS WITH PARAMETERS

Matveeva T.A., Svetlichnaya V.B., Mustafina D.A., Rebro I.V., Rakhmankulova G.A.

Volzhsky polytechnical institute (branch) of Federal state the budget of educational institution higher education «Volgograd state technical university», Volzhsky, e-mail: vpf@volpi.ru

The article deals with the issue of preparing high school students who have chosen a technical direction of study in the future to study higher mathematics at the University. The second part of the unified state examination in mathematics contains seven problems (13–19). Work verification practice shows that tasks with parameters (18) are the most complex. They do not require the use of ready-made solution algorithms, but a generalization and analysis of the methods used in mathematics. Students are required to have a great flexibility in the course of mathematics and a great ability to link its various sections into a common chain of reasoning. In the above problems, the solution method is immediately specified and its advantage is explained. At the end of the solution, attention is once again drawn to the subtle points in the reasoning, and other approaches are proposed. In the second and third problems, the same solution method is used – the monotonicity method of the function, but its implementation is different. The fourth and fifth tasks are similar in their solution steps, but they differ in checking the constraints for the variable. The considered problems can be solved as students, using the knowledge in mathematics obtained at a higher educational institution. Thus, the article reflects an important point in the formation of mathematical thinking of the schoolkid → student → future specialist: from ready-made methods to creativity!

Keywords: math training, schoolkid, EGE, non-standard tasks.

По данным статистики ЕГЭ по математике (профиль) только 4,2% абитуриентов решают правильно задачи с параметрами (задание № 18), эти задания относятся к уровню сложности «высокий» и оцениваются максимально 4 баллами [1]; из бесед следует, что большинство абитуриентов не знакомы с методами решения таких задач. Без качественной школьной подготовки невозможно сформировать у подрастающего поколения фундаментальные знания, что является необходимым условием для успешного изучения в технических вузах высшей математики и других базовых дисциплин.

Проблемой обучения школьников решению задач с параметрами занимались М.И. Башмаков, Ю.М. Важенин, В.А. Далингер, А.Г. Мордкович, Г.И. Саранцев и др.

Практика проведения вступительных экзаменов, ЕГЭ и олимпиад по математике показывает, что задачи с параметрами являются для старшеклассников задачами повышенной сложности, при решении которых необходимо не только знание разнообразных методов и приемов, но и гибкость математического мышления. В школьной программе по математике мало времени уделяется решению такого рода задач, и многим абитуриентам они не по силам.

Цель исследования: формирование у абитуриентов фундаментальных знаний по математике посредством изучения нестандартных методов при решении задач с параметрами из повышенного уровня ЕГЭ (профиль).

Материал и методы исследования. В исследовании принимали участие абитуриенты, обучающиеся на подготовительных курсах, ученики школ 10–11-х классов, учителя-предметники, эксперты ЕГЭ. Был проведен анализ литературы, в которой описывались различные методы решения задач с параметрами [2–4].

Разумная классификация задач с параметрами по методам решений достаточно затруднительна, поскольку каждая из них является в определенной степени нестандартной и творческой. Наиболее часто используемые методы решения задач с параметрами: графический метод, метод оценки, метод симметрии, использование ограниченности и монотонности функций и т.п.

Одним из наиболее эффективных методов решения задач с параметрами служит графический способ. Он является более доступным и понятным для старшеклассников в связи со своей наглядностью. Мы остановимся на других методах решения нестандартных задач, в которых требуются логические суждения и умение анализировать различные ситуации. Решение таких задач вызывает у школьников затруднения как в логическом, так и в техническом плане.

Задача 1. Найдите все значения a*, при каждом из которых уравнение* $\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$ *имеет единственное решение.*

Решение. В первую очередь замечаем, что можно ввести замену по параметру: $a-5=p$. В силу этого уравнение примет симметрический вид:

$$\sqrt{x^4+p^4}=|x+p|+|x-p| \qquad (1).$$

Введем функцию $f(x)=\sqrt{x^4+p^2}-|x+p|-|x-p|,\ x\in R$. Уравнение (1) примет вид: $f(x)=0$. Легко проверить, что $f(-x)=f(x)$, т.е. функция четная. Следовательно, если x_0 является корнем уравнения, то и $(-x_0)$ также корень данного уравнения. По условию решение должно быть единственным, т.е. может быть только $x_0=0$. Подставим его в уравнение (1): $\sqrt{0^4+p^4}=|0+p|+|0-p| \quad\Rightarrow\quad p^2=2|p| \ \Rightarrow\ |p|\cdot(|p|-2)=0$.

Корни этого уравнения $p=0;\pm 2$. При этих значениях p мы гарантируем, что ноль является корнем, но утверждать, что он единственный, не можем. Поэтому надо подставить найденные значения параметра в уравнение (1) и проверить количество решений при каждом из них.

Если $p=0$, то $\sqrt{x^4}=|x|+|x| \quad\Rightarrow\quad x^2=2|x| \ \Rightarrow\ x=0;\pm 2$.

Получили три решения, следовательно, $p=0$ не подходит.

Если $p=\pm 2$, то $\sqrt{x^4+16}=|x-2|+|x+2|$.

Поскольку обе части неотрицательны, то возведем в квадрат:

$x^4+16=(x-2)^2+2|x^2-4|+(x+2)^2$,

$$x^4-2x^2+8=2|x^2-4|. \qquad (2)$$

Решим уравнение (2), раскрыв модуль по определению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4\ge 0,\\ x^4-2x^2+8=2(x^2-4),\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4<0,\\ x^4-2x^2+8=-2(x^2-4),\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4\ge 0,\\ (x^2-2)^2+12=0,\ \varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4<0,\\ x=0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow\ x=0.$$

Получили единственное решение, следовательно, $p=\pm 2$ подходит. Тогда находим соответствующие значения параметра $a=3;7$.

Ответ: $a=3;7$.

Отметим важные шаги решения. Во-первых, при решении данной задачи нужно было обратить внимание на единственность решения (в общем случае – нечетность количества корней) и четность уравнения относительно неизвестной. Во-вторых, правильно сделать вывод, что нам дает нахождение значений параметра p, если ноль является корнем уравнения. Решения уравнения (2) было найдено аналитическим способом. Можно было показать количество решений и графическим способом.

Задача 2. Найдите значения a, при каждом из которых решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+3\log_2(3x-1)+2a=0 \quad \textit{принадлежит отрезку } [1;3].$$

Решение. Введем функцию $f(x)=4\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+3\log_2(3x-1)$, определенную на интервале $(1/3;+\infty)$. Данная функция является непрерывно возрастающей в своей области определения как сумма двух непрерывно возрастающих функций.

Поэтому множеством значений функции $f(x)$ на отрезке $[1;3]$ будет являться промежуток $[f(1);f(3)]$. Вычислим значения функции в граничных точках отрезка:

$$f(1)=4\sqrt[3]{3{,}5-2{,}5}+3\log_2 2=4+3=7\,;\quad f(3)=4\sqrt[3]{10{,}5-2{,}5}+3\log_2 8=8+9=17\,.$$

Получаем, что множество значений функции на данном промежутке $E_f=[7;17]$.

Исходное уравнение можно записать в виде $f(x)=-2a$, и по условию оно должно иметь решения на промежутке $[1;3]$. Это равносильно, что значение $(-2a)$ попадает в множество значений функции $f(x)$ на данном отрезке, т.е. $7\le -2a\le 17 \quad \Rightarrow \quad -8{,}5\le a\le -3{,}5$.

Ответ: $a\in[-8{,}5;-3{,}5]$.

Первое впечатление от этого задания – это «нереальность» его решения в общем случае, поэтому надо использовать один из методов нестандартного решения: графический метод, оценка, монотонность функции и т.п. Конкретно к этому типу задания однозначно применяется метод монотонности функции.

В следующем примере также используется этот же метод, но в техническом плане решение будет другим.

Задача 3. Найдите значения a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6+(4a-2x)^3+6x^2+8a=4x \quad \textit{не имеет корней.}$$

Решение. Преобразуем уравнение: $27x^6+6x^2=-(4a-2x)^3+4x-8a$ или

$$(3x^2)^3+2\cdot(3x^2)=(2x-4a)^3+2\cdot(2x-4a). \qquad (3)$$

Пусть $t_1=3x^2$, $t_2=2x-4a$, тогда уравнение (3) примет вид: $t_1^{\,3}+2t_1=t_2^{\,3}+2t_2$.

Введем вспомогательную функцию: $f(t)=t^3+2t$. Отметим, что данная функция является возрастающей при $t\in R$, т.к. $f'(t)=3t^2+2>0$.

В силу монотонности функции $f(t)$ имеем $f(t_1)=f(t_2)\ \Rightarrow\ t_1=t_2$.

Значит, $3x^2=2x-4a \quad \Rightarrow \quad 3x^2-2x+4a=0\ \ (D=4-48a)$.

По условию уравнение не имеет корней, т.е. дискриминант $D<0$:

$$4-48a<0\ \Rightarrow\ a>1/12\,.$$

Ответ: $a \in (1/12; +\infty)$.

Задача 4. Найдите значения a*, при каждом из которых уравнение*

$$(tgx+6)^2-(a^2+2a+8)(tgx+6)+a^2(2a+8)=0$$

имеет на отрезке $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ *ровно два решения.*

Решение. Отметим, что $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ существует, если $\cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. С учетом нашего промежутка получаем $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Введем замену $t = tgx + 6$. Получим уравнение:

$$t^2-(a^2+2a+8)\,t+a^2(2a+8)=0.$$

По обратной теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} t_1+t_2=a^2+(2a+8), \\ t_1\cdot t_2=a^2\cdot(2a+8); \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=a^2, \\ t_2=2a+8. \end{array}\right.$$

Функция $y = tgx + 6$ является возрастающей на своей области определения, поэтому если 1) $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $t \in [6; +\infty)$; 2) если $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то $t \in (-\infty; +\infty)$.

Таким образом, если $t \in [6; +\infty)$, то получим два решения по переменной x; если $t \in (-\infty; 6)$, то получим одно решение по переменной x.

Для выполнения условия задачи возможны два случая:

$$t_1 = t_2 \in [6; +\infty) \quad и \quad \begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ t_1; t_2 \in (-\infty; 6). \end{cases}$$

1. $t_1 = t_2 \Leftrightarrow a^2 = 2a + 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2, \\ a=4; \end{array}\right.$

Получаем, что если $a = -2$, то $t_1 = t_2 = 4 \in (-\infty; 6)$, т.е. уравнение имеет одно решение, что не удовлетворяет условию задачи.

Если $a = 4$, то $t_1 = t_2 = 16 \in [6; +\infty)$, т.е. уравнение имеет два решение. Следовательно, значения $a = 4$ подходит.

2. Если $t_1 \neq t_2$ $(a \neq -2;\ a \neq 4)$, то

$$\begin{cases} t_1 < 6, \\ t_2 < 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < 6, \\ 2a+8 < 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{6}, \\ a < -1, \end{cases} \Rightarrow a \in (-\sqrt{6}; -1).$$

Таким образом, $\begin{cases} a \in \left(-\sqrt{6};-1\right), \\ a \neq -2;\ a \neq 4, \end{cases} \Rightarrow\ a \in \left(-\sqrt{6};-2\right) \cup \left(-2;-1\right).$

Ответ: $a \in \left(-\sqrt{6};-2\right) \cup \left(-2;-1\right) \cup \{4\}.$

Замечания по задаче:

1) при решении этой задачи сразу «напрашивались» замена переменной и сведение исходного уравнения к квадратному;

2) нахождение корней по обратной теореме Виета не обязательно, можно было вычислить дискриминант, который получился бы полным квадратом;

3) после введения переменой необходимо прописать множество значений новой величины;

4) требуется проанализировать ситуации получения нужного количества корней уравнения.

Следующая задача по структуре очень похожа: замена переменной и сведение к исследованию корней квадратного уравнения, но проверка ограничений (ОДЗ) будет более тщательной.

Задача 5. Найдите значения a *, при каждом из которых уравнение*

$$\left(\log_6(x+a)-\log_6(x-a)\right)^2-4a\left(\log_6(x+a)-\log_6(x-a)\right)+3a^2+4a-4=0$$

имеет ровно два решения.

Решение. Выпишем ОДЗ: $\begin{cases} x+a>0, \\ x-a>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-a, \\ x>a. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>a, \\ a\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x>-a, \\ a<0. \end{cases} \end{array}\right.$

Введем замену $t=\log_6(x+a)-\log_6(x-a)$.

Получим уравнение: $t^2-4a\,t+3a^2+4a-4=0$. (4)

Вычислим дискриминант

$$D=16a^2-4\left(3a^2+4a-4\right)=4\left(a^2-4a+4\right)=4(a-2)^2.$$

Если $D=0\ \ (a=2)$, то $t_1=t_2=2a=4$.

Если $D>0\ \ (a\neq 2)$, то $\left[\begin{array}{l} t_1=3a-2, \\ t_2=a+2. \end{array}\right.$

Пусть t_0 – корень уравнения (4). Найдем соответствующее значение неизвестной x.

$$\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=t_0 \quad \Rightarrow \quad \log_6(x+a)=\log_6(x-a)+\log_6 6^{t_0},$$

$$\log_6(x+a)=\log_6\left(6^{t_0}(x-a)\right) \quad \Rightarrow \quad x+a=6^{t_0}(x-a),$$

$$x\left(6^{t_0}-1\right)=a\left(6^{t_0}+1\right) \qquad \Rightarrow \quad x=\frac{a\left(6^{t_0}+1\right)}{\left(6^{t_0}-1\right)},\ t_0\neq 0.$$

Если $t_0=0$, то $\begin{cases}3a^2+4a-4=0,\\ x\cdot 0=a\cdot 2,\end{cases}$ система не имеет решения.

Вычислим значения t_0, при которых $x\in$ОДЗ.

1. Если $a=0$, то $x>0$: $\dfrac{0\cdot\left(6^{t_0}+1\right)}{\left(6^{t_0}-1\right)}>0 \Rightarrow$ не имеет решения.

2. Если $a>0$, то $x>a$:

$$\frac{a\left(6^{t_0}+1\right)}{\left(6^{t_0}-1\right)}>a \quad \Big|:a>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6^{t_0}+1}{6^{t_0}-1}>1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{6^{t_0}-1}>0 \quad \Rightarrow \quad 6^{t_0}-1>0 \Rightarrow t_0>0.$$

3. Если $a<0$, то $x>-a$:

$$\frac{a\left(6^{t_0}+1\right)}{\left(6^{t_0}-1\right)}>-a \quad \Big|:a<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6^{t_0}+1}{6^{t_0}-1}<-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\cdot 6^{t_0}}{6^{t_0}-1}<0 \quad \Rightarrow \quad 6^{t_0}-1<0 \Rightarrow t_0<0.$$

Таким образом, ОДЗ по переменной t: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0,\\ t_0>0,\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\ t_0<0.\end{cases}\end{array}\right.$ (5)

По условию нам нужно ровно два решения по переменной x, тогда и по переменной t тоже должно быть два различных решения, удовлетворяющих ОДЗ (5).

Выше получили, что при $a\neq 2$: $\left[\begin{array}{l}t_1=3a-2,\\ t_2=a+2.\end{array}\right.$

1. $t_1=3a-2$: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0,\\ 3a-2>0,\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\ 3a-2<0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a>2/3,\\ a<0,\end{array}\right. \Rightarrow a\in(-\infty;0)\cup(2/3;+\infty).$

$$2.\quad t_2 = a+2: \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0, \\ a+2>0, \end{cases} \\ \begin{cases} a<0, \\ a+2<0, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a>0, \\ a<-2, \end{array}\right. \Rightarrow a \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty).$$

Получаем $\begin{cases} a \in (-\infty;0) \cup (2/3;+\infty), \\ a \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty), \\ a \neq 2, \end{cases} \Rightarrow \quad a \in (-\infty;-2) \cup (2/3;2) \cup (2;+\infty).$

Ответ: $a \in (-\infty;-2) \cup (2/3;2) \cup (2;+\infty)$.

Отличие трех решений заключается в различных способах проверки ограничений.

Для создания математической модели данной задачи требуются гибкость мышления и уверенное владение математическим аппаратом.

Результаты исследования и их обсуждение. Абитуриенты и школьники обучились новым приемам и методам решения сложных нестандартных задач с параметрами. Полученные навыки являются мощным инструментом формирования фундаментальных знаний, а также повышают уровень развития математической культуры.

Выводы. Абитуриенты, способные решать задачи с параметрами, более успешно справляются и с другими заданиями ЕГЭ, умеют конструировать новые способы решения задач, осознанно выбирают рациональные методы решения, решают задачи несколькими способами, более того – увеличиваются скорость и качество техники решения задач.

Заключение. Задачи с параметрами относятся к заданиям повышенного уровня и располагаются в вариантах профильного ЕГЭ по математике на последних позициях. Оцениваются они более высокими первичными баллами и предназначены для тех абитуриентов, которые претендуют на высокий экзаменационный балл. Изучение нестандартных методов на примере решения задач с параметрами [5–7] не только позволяет расширить область успешно решаемых задач по математике, но и способствует развитию у старшеклассников нестандартного, конструктивного математического мышления, которое необходимо для будущих инженеров.

Список литературы

1. Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Семенов А.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике. М., 2019. 25 с.

2. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2013. 96 с.

3. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач: Учебное пособие. М.: Книжный дом «Либроком», 2013. 296 с.

4. Шестаков С.А. ЕГЭ 2016. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. М.: МЦНПО, 2016. 240 с.

5. Лупашевская В.Ю., Пукас Ю.О. Задачи с параметрами для ЕГЭ по математике «18+». М.: ООО «Азбука-2000», 2016. 92 с.

6. Колесникова С.И. Задачи с параметром. ЕГЭ. Математика. М.: ООО «Азбука-2000», 2013. 112 с.

7. Гущин Д.Д. «Решу ЕГЭ»: математика. Обучающая система Дмитрия Гущина. [Электронный ресурс]. UR: https://ege.sdamgia.ru/test?theme=219 (дата обращения: 02.04.2020).