

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К РЕАЛИЗАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Евдокимова Г.С.¹, Сенькина Г.Е.¹

¹ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет», Смоленск, e-mail: kaf-matem@smolgu.ru

Прошло более 10 лет с момента внедрения элементов стохастики в российские школы. Однако до сих пор реализация этой части математики осуществляется без особого энтузиазма. Поэтому актуальны вопросы, связанные с этой проблемой. Один из них – оказание методической помощи учителям, которые должны в доступной форме изложить элементарное описание стохастики, постоянно подчеркивая, что ее составные части – математическая статистика и теория вероятностей – взаимосвязаны. При изучении стохастики они не должны применять механистический подход, так как любая строгая теория вторична, а первичными являются интуиция и опыт. Для понимания научной значимости вводимых понятий и их дальнейшего применения изложение основного материала необходимо осуществлять на примерах прикладного содержания. С учетом этих требований в статье представлены рекомендации по структуре и содержанию курса. Подчеркнуто, что особенность стохастической линии побуждает учителя осуществлять деятельность школьников таким образом, чтобы в форме обнаружения ранее неизвестных инструментов познания реальной действительности происходило изучение основных понятий и методов. Дан ответ на вопрос, каким способом можно формировать начальные стохастические представления. Очевидно, этому могут способствовать: эксперименты со случайными исходами, стохастические игры, статистические исследования, компетентностно-ориентированные задания, моделирование. Заострено внимание на методических способах, представляющих существенную роль в обучении стохастике, таких как простота изложения, наглядность, соединение вводимых понятий с конкретной практикой, отсутствие в некоторых задачах однозначного ответа, проведение экспериментов, применение компьютерных технологий с использованием математических пакетов, находящихся в свободном доступе.

Ключевые слова: стохастические знания, специфика подхода при обучении, методы обучения стохастике, средства формирования начальных стохастических представлений, математические компьютерные программы.

METHODOLOGICAL NOTES ON THE IMPLEMENTATION OF THE STOCHASTIC LINE IN THE COURSE OF SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS

Evdokimova G.S.¹, Senkina G.E.¹

¹FSBEI HE «Smolensk State University», Smolensk, e-mail: kaf-matem@smolgu.ru

It has been longer than 10 years since the stochastics elements (i.e. the theory of probability and mathematical statistics) were put into practice in Russian schools. However, realization of this part of mathematics is still carried out without special enthusiasm. Therefore the questions connected with this problem is very relevant today. One of these questions is the rendering the methodological assistance to the teachers, who should represent the elementary description of stochastics in a clear way, highlighting that the theory of probability and mathematical statistics are integrated. While learning stochastics teachers should not use mechanistic approach because any rigorous theory is secondary, and the intuition and experience are primary. The presentation of basic material is necessary fulfilled using applied content for understanding scientific significance of considering terms and their further use. Considering these requirements the article is represented recommendations on structure and curriculum content. Moreover, the article is highlighted that the feature of stochastic line encourages a teacher to carry out activities the pupils so that a study of basic concepts and methods took place in the form of discovering previously unknown tools for cognition of reality. The answer to the question: what is the method can make the elemental stochastic ideas. It is clear that the experiments with chance outcomes, stochastic games, statistics researches, competence based exercises, modeling can helps to find the answer to the questions. The methodological methods which are played significant role in teaching stochastics, are highlighted in this paper. These methods consist of the simplicity of presentation, visibility, connection between introduced terms and specific practice, no unambiguous answer in some tasks, the performance of the experiments, using computer technologies with mathematical free software.

Keywords: stochastic knowledge; specifics of the approach to learning, methods of teaching stochastics, means of forming initial stochastic representations, mathematical computer programs.

Представляя важный аспект образования современного человека, элементы стохастики были внедрены в школьную математику с 2006–2007 учебного года. Однако большинство учителей реализуют ее до сих пор без особого энтузиазма и результатов, что проявляется и в отсутствии интереса школьников к данной теме, и в итогах ЕГЭ (некоторые выпускники даже не приступают к решению задач на вероятность, делают грубые ошибки в простейших случаях) [1]. Постараемся найти ответ на вопрос: почему? Очевидно, с элементами стохастики не знакома часть учителей, в школах недостает практики получения знаний по этому направлению, стохастическое мышление отсутствует при усвоении других школьных предметов, неоднозначны требования по стохастической подготовке учащихся для разных образовательных ступеней [2, 3]. До сих пор среди учителей математики присутствует дефицит свободно владеющих содержанием стохастики и умением решать задачи по этому курсу. Недостаток методической литературы толкает учителя на создание методом проб и ошибок своей методики обучения стохастике, что приводит к разноуровневости и разнородности результатов обучения стохастике.

Цель исследования: аргументация поиска новых общих подходов для реализации стохастической линии в общеобразовательной школе.

Материал и методы исследования: анализ стандартов образования, подлежащей учебной, методической, научной практики и литературы; использование в ходе исследования моделирования, системного, проектного, компетентностного подходов.

Результаты исследования и их обсуждение. Для поиска новых подходов к обучению стохастике в школе необходимо определить причины затруднений. Учителю, чтобы обнаружить красоту, услышать поэзию, которая свойственна стохастике, надо в первую очередь избавиться от страха внешней сложности этого раздела математики; освоить *методику*, позволяющую формировать у школьников недетерминированные понятия.

I. Учитывая методический принцип первичности статистики, рекомендуется приступить к познанию основ стохастики с ее *основных понятий* [4].

Для мотивации введения основных понятий необходимо учитывать следующее.

1. На огромном количестве примеров из разных источников важно донести до школьников одну из главных идей – *случайной изменчивости* – так, чтобы подвести их к вопросу: случайны ли случайности? Мотивировать эту познавательную активность учитель сможет множеством примеров, которые помогут ученикам осознать: в мире случайностей наблюдается явный порядок, подчиняющийся внутренним, незримым законам. В массовых явлениях, подверженных огромному количеству случайных причин, случайность сбрасывает с себя покрывало таинственности и как бы перестает быть случайной.

2. Одновременно с понятием случайной изменчивости школьникам должны быть представлены ее *основные числовые характеристики*: медиана, среднее значение, мода, дисперсия. При введении этих понятий желательно не использовать формальные определения и доказательства, а учитывать психолого-педагогические факторы, опираться на ощущения и восприятие реального мира [5].

Например, можно задать учащимся вопрос: «Как выглядит типичный домашний котик с позиции его размера?» Учитель поясняет, что первый и наиболее очевидный способ – посмотреть, какой размер котиков встречается чаще всего, и назвать этот показатель модой. Второй способ: поставить по росту всех котиков в ряд. Окажется, что в середине ряда будет стоять котик с типичным размером – медианой. Третий способ – поделить на количество котиков их суммарный размер. Полученное число в современной статистике носит название среднего значения. Необходимо постоянно напоминать учащимся, что измерение центральной тенденции включает три характеристики: моду, медиану, среднее значение – и подсказать, какой из трех видов среднего следует применять в конкретном случае. Например, имеется информация: у сотрудников средняя зарплата достаточно высока. Она может означать нечто конкретное, а может и не означать ничего. Если в данной ситуации средний показатель представляет собой медиану, он предоставит нам нечто существенное, а именно, что половина сотрудников зарабатывает больше указанной суммы, а другая половина – меньше. Часто у школьников возникает вопрос: «Насколько котики могут быть разнообразными по размеру?» Ответ на него помогают получить различные характеристики рассеяния: размах – отличие наибольшего и наименьшего размеров, дисперсия и стандартное отклонение. Чтобы ученики поняли, как они устроены, предложите им сравнить размер конкретного домашнего котика Елисея со средним размером всех участвующих в эксперименте котиков. Разность этих размеров назовем отклонением. Ученики отмечают: отклонение будет увеличиваться, если размер Елисея будет достаточно отличаться от размера среднего котика. И, чем больше будет котиков с существенным отклонением, тем разнообразнее по размеру они будут. А чтобы разобраться, какое отклонение является наиболее типичным, можно вычислить среднее значение по этим отклонениям. Однако результат получится равным нулю. Преодолеть это препятствие учащиеся могут следующими приемами: брать модуль от отклонений или возводить их в квадрат, который всегда положителен. Второй способ приводит к понятию дисперсии.

II. При *обучении умозаключениям* в стохастике учителю необходимо:

1) учитывать тот факт, что у учащихся выявляется специфичность стохастических умозаключений: неоднозначная трактовка одной и той же статистической информации. Поэтому, реализуя стохастическую ветвь математики, необходимо добиваться развития у

школьников критического отношения к статистическим выводам, а также умения обнаруживать фальсификации;

2) подвести учащихся к пониманию того, что для получения недостоверной информации часто применяют некоторые способы обмана наглядной статистической базы данных: представляют сдвиг шкалы, проценты вместо абсолютных величин, скрывают данные, изменяют масштабы. Предложите учащимся самостоятельно ознакомиться со статистикой авиакатастроф, например в 1923 и 2020 гг. Если они поймут, насколько некорректно соединены статистические данные с событиями, которые должны характеризовать (не учитывается соотношение между общим количеством перелетов и авиакатастроф среди них), то у многих из них пропадет желание пользоваться услугами воздушного транспорта.

III. Учителю необходимо подводить учащихся к **новым методам познания** окружающего мира. Особенность стохастической линии побуждает учителя организовать деятельность школьников таким образом, чтобы в форме обнаружения ранее неизвестных инструментов познания реальной действительности осуществлялось изучение основных понятий и методов. В ходе их обучения элементам стохастики возникают благоприятные условия для *эвристической* деятельности. Организация проблемной ситуации мотивирует учащихся к неизбежности внедрения ранее неизвестных понятий [6]. В курсе школьной математики индуктивность обучения проявляется в том, что учителю необходимо добиться у учащихся, постоянно на примерах демонстрируя факт полного понимания: на практике *частотный* подход является приоритетным способом нахождения вероятности события. Например, уместно спросить учеников, для какой цели нужно знать и как найти приближенную вероятность попадания автомобиля в ДТП. Желаемый ответ: для подсчета суммы страховой выплаты владельцами страховых компаний. Школьники постепенно с помощью экспериментов и компьютерного моделирования должны прийти к выводу: одна из наиболее характерных закономерностей, замечаемых в массовых случайных явлениях, – свойство устойчивости частот при большом числе однородных опытов. Приоритетное место в этом направлении занимает вопрос: все ли события допускают нахождение вероятности с помощью эксперимента? На достаточно большом количестве конкретных примеров определения частоты событий школьники должны понять, что не все эксперименты сколько угодно раз можно повторить. Например, опытным путем нельзя найти вероятность события: смартфон разобьется, упав на пол.

При описании случайных событий особое внимание необходимо уделять понятию *случайного эксперимента* и соответствующего множества элементарных событий [7]. На этапе начального знакомства с элементами стохастики следует уходить от неконкретных

формулировок в вероятностных задачах, заботиться, чтобы условия случайного эксперимента формулировались понятно и однозначно. Невыполнение этого требования в дальнейшем приведет к конкретным трудностям при решении стохастических задач. Например, в кошельке лежат четыре монеты достоинством по пять рублей и семь монет по десять рублей. Наудачу берется одна монета. Нужно определить вероятность того, что она имеет достоинство в пять рублей (событие A). Воспользовавшись классическим определением вероятности, получаем: $P(A) = 5/12$. Рассмотрим тот же кошелек, в котором находятся четыре монеты достоинством по пять рублей и семь монет по десять рублей, но изменены условия опыта. Наудачу берется одна монета, не глядя, перекаладывается в карман костюма. Затем из кошелька извлекается вторая монета. Нужно определить вероятность того, что она также имеет достоинство в пять рублей. Поразмыслив, можно утверждать, что предварительное извлечение какой-то монеты неизвестного достоинства абсолютно не оказывает влияния на вероятность появления монеты достоинством в пять рублей при втором извлечении. Она не меняется и равна, как в предыдущем примере, $5/12$. Первоначально этот результат многим может показаться неверным, так как, когда извлекали вторую монету, в кошельке находилось не двенадцать монет, а всего одиннадцать. Не означает ли это, что и число всех благоприятных исходов было равно 11? Ответ отрицательный. До момента, пока нет информации, какого достоинства была первая монета (с этой целью ее спрятали в карман), число всех благоприятных исходов остается равным 12. Вновь поменяем условия опыта: на этот раз предварительно извлекаем из кошелька все монеты, кроме одной, и, не глядя, поместим их в карман костюма. Затем из кошелька берется оставшаяся в нем монета. Какова вероятность того, что она имеет достоинство в пять рублей? Очевидно, $P(A) = 5/12$, так как абсолютно все равно, что осуществить: выбрать монету для того, чтобы извлечь ее из кошелька, или для того, чтобы в нем оставить. Если и до этого момента учащиеся не убеждены, что вероятность извлечения монеты достоинством в пять рублей остается равной $5/12$, сколько бы монет предварительно ни убрали в карман костюма, предлагаем провести с ними такой опыт: в кошельке четыре монеты достоинством по пять рублей и семь монет по десять рублей. В комнате темно. Берем кошелек и раскладываем монеты: две помещаем на шкаф, три – на подоконник, четыре – на тахту, а остальные три – разбрасываем по столу. После этого прошлись по комнате, подошли к столу и нащупываем монету. Какова вероятность, что это монета достоинством в пять рублей? Ответ становится более очевидным для детей.

IV. В процессе обучения стохастике важно также учитывать ее *специфику*.

1. В практике обучения часто возникают трудности *задания элементарных событий*.

Поэтому для практических ситуаций необходимо познакомить учащихся с элементами

комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания, дать наглядное представление их использования, проиллюстрировать запоминающимися примерами. Например: ученик купил карточку Спортлото и наудачу зачеркнул из имеющихся 49 номеров 6. Предлагается определить вероятность того, что он безошибочно угадал 4 из 6 номеров, которые будут указаны в списке выигравших.

Понятие равновозможности событий в школьном курсе стохастики находится в центре внимания. Оно является первичным, формальному определению не подлежит. Однако в школьном курсе стохастики нереально использовать только равновозможные элементарные события.

2. Несколько слов о схеме Бернулли, которая осуществляет *методическую роль*: определяет путь приближенного нахождения вероятностей событий, объединяет ранее рассмотренные понятия и методы. Следовательно, эта тема помогает повторить и закрепить пройденный ранее материал. Кроме того, нахождение математического ожидания и дисперсии для числа успехов позволяет сформулировать закон больших чисел. Помимо значимости для математики, он выполняет мировоззренческую нагрузку, демонстрируя более достоверное представление об окружающем мире позволяет произвести усреднение случайных величин. Поговорка «Семь раз отмерь, один раз отрежь!» – представление закона больших чисел на бытовом уровне. Учащиеся должны осознать: иллюстрирует появление закономерности в случайных явлениях именно этот закон [8, с. 7].

3. Тесная *связь абстрактных понятий с окружающим миром* – одно из главных отличий реализации элементов стохастики в школе. Поэтому учителю необходимо направлять деятельность школьников на создание *стохастических моделей*. Желательно разъяснять ученикам вероятностно-статистические проблемы, свойственные реальной жизни. Например, владельцу рыбного магазина стали поступать от покупателей жалобы на некачественную икру. Как ему поступить, чтобы убедиться в достоверности информации? Естественно, экономически нецелесообразно вскрывать каждую консервную банку. Можно ограничиться небольшим количеством банок, подвергнуть их тщательной проверке, т.е. использовать выборочное исследование.

V. Одна из актуальных целей преподавания школьникам элементов стохастики направлена на понимание того, что и в природе, и в обществе работают вероятностно-статистические закономерности. Учителю необходимо помочь учащимся достоверно осознать реальную действительность, случайную природу окружающего их мира, в котором можно прекрасно ориентироваться и действовать активно [9]. Естественно, возникает вопрос: каким *способом* у них можно формировать начальные стохастические представления? Очевидно, этому могут способствовать: 1) эксперименты со случайными

исходами; 2) стохастические игры (следует помнить, что человеческая жизнь – это постоянный процесс принятия решений, а стратегически случайная игра прекрасно отражает и демонстрирует сущность этого процесса); 3) статистические исследования; 4) компетентностно-ориентированные задания, 5) моделирование [10]. Например, Никита и Юля достают, не глядя, два жетона из коробки, в которой находится одинаковое количество черных и белых жетонов. Никита выигрывает, если вынутые жетоны окажутся разного цвета. Юля выигрывает, если оба жетона окажутся черными. В случае появления двух белых жетонов объявляется ничья. Справедлива ли игра при таких условиях? Учащимся предлагается в качестве домашнего задания поиграть в эту игру с кем-нибудь из представителей семьи, экспериментально, а затем теоретически убедиться, кто чаще будет выигрывать. Большой интерес у учащихся вызывает следующая задача. Допустим, нужно решить, какой шар – черный или синий – добавить в урну с двумя синими шарами и одним черным, чтобы при извлечении двух шаров из этой урны события: вынутые шары разные по цвету, оба шара одного цвета – имели одинаковые шансы? Школьники довольно часто предлагают положить черный шар. На основании эмпирических данных желателно проверить достоверность интуитивного ответа. Обработав результаты случайного выбора из урны такого состава, они подмечают, что шары разного цвета появляются чаще в два раза. Этот статистический факт вынуждает учащихся задуматься и обратиться за помощью к математике: почему так получается. На примере прогнозирования ожидаемого числа мальчиков и девочек среди будущих первоклассников в следующем учебном году учителю предлагаем продемонстрировать следующий факт: монета – это средство моделирования неустойчивых событий. Использование нестандартных условий задачи способствует усилению мотивационного компонента познавательной самостоятельности школьника. Первая задача – о днях рождения. На встрече собрались N человек, выбранных случайным способом. Нужно оценить шанс того, что, по крайней мере, два из них празднуют день рождения в один и тот же день. Или, точнее, сколько людей должно прийти на встречу, чтобы вероятность такого совпадения равнялась $1/2$ (50%)? Вторая задача – о днях рождения. Нужно найти не двух человек, отмечающих день рождения в один день, а человека, день рождения которого совпадает с моим днем рождения. Сколько человек должно прийти на встречу, чтобы вероятность такого совпадения превысила 50%?

С учетом современных требований в образовании целесообразно как можно чаще использовать при решении задач компьютерные технологии [11, с. 412]. Например, при сеансе одновременной игры со школьниками мастера спорта по шахматам оценить: сколько учащихся необходимо пригласить, чтобы вероятность поражения мастера была бы больше b ?

При конкретных значениях b решение можно получить, например, в свободно распространяемом пакете GeoGebra [12].

VI. С включением в содержание школьного образования элементов стохастики возникла необходимость *увязывания стохастических и традиционных понятий*. Поэтому анализ случайных событий должен осуществляться не только стохастическими методами, но и с помощью средств «обычной» математики [13]. Стохастическое содержание естественным образом должно входить внутрь детерминированных тем математики, способствуя их закреплению. Это хорошо демонстрирует усвоение темы «Проценты» [14].

Выводы. Таким образом, в нашем исследовании выявлены основные аргументы для изменения подходов к обучению стохастики в школе: 1) необходимость обеспечения мотивации при введении основных понятий, обучении умозаключениям, новым методам познания мира; 2) учет специфики стохастики как раздела математики; 3) использование различных способов формирования стохастических понятий; 4) необходимость связи с традиционными разделами математики. Недалеко то время, когда стохастическое мышление будет обязательным атрибутом для человека, как умение читать и писать. Поэтому, если почувствовать в полном объеме мировоззренческую значимость изучения стохастической линии школьной математики, осознать, что случайный мир должен быть «открыт» детьми благодаря усилиям учителя математики, то, несомненно, сформируются силы для форсирования трудностей, которых еще немало при реализации этого раздела школьной математики.

Список литературы

1. Сенькина Г.Е. Единый государственный экзамен: проблемы и тенденции математической подготовки обучающихся // Современные проблемы науки и образования. 2018. № 6. [Электронный ресурс]. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=28403> (дата обращения: 12.03.2021).
2. Мешкова О.А., Божко Е.С. Особенности обучения элементам стохастики на основе принципа преемственности между начальной и средней школой // Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова 2017. № 1. С. 248–255.
3. Гашаров Н.Г. О развитии стохастической культуры младших школьников // Мир науки, культуры, образования. 2016. № 2 (57). С. 61–63.
4. Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и математической статистики // Математика в школе. 2014. № 5. С. 32–43.

5. Евдокимова Г.С., Сенькина Г.Е. Учет психолого-педагогических факторов при изучении стохастики в вузе // Современные проблемы науки и образования. 2019. № 1. [Электронный ресурс]. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=28586> (дата обращения: 15.03.2021).
6. Ахмедьянова Н.А., Мамалыга Р.Ф. Формирование основных понятий вероятностно-статистической линии в современном школьном курсе // Педагогическое образование в России. 2014. № 8. С. 228–233.
7. Гаваза Т.А. О преподавании теории вероятностей в средней школе. Методический аспект // Вестник Псковского государственного университета. Серия: Естественные и физико-математические науки. 2014. № 4. С. 87–92.
8. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика: методическое пособие для учителей. М.: МЦНПО: МИОО, 2008. 56 с.
9. Евдокимова Г.С., Сенькина Г.Е. Об обучении стохастике в вузе // Современные проблемы науки и образования. 2020. № 3. [Электронный ресурс]. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=28586> (дата обращения: 12.03.2021).
10. Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников. М.: Просвещение, 1996. 191 с.
11. Евдокимова Г.С., Усачев В.И. Системы компьютерной математики, используемые при обучении будущего учителя // Известия СмолГУ. 2015. № 4. С. 411–420.
12. GeoGebra Manual. The official manual of GeoGebra. [Электронный ресурс]. URL: http://facultyfp.salisbury.edu/despickler/personal/Resources/GeoGebra_Guides/GeoGebraManual.pdf (дата обращения: 12.03.2021).
13. Терехова Л.А. Взаимодействие элементов стохастики с числовой содержательно-методической линией школьного образования // Вестник Тамбовского университета Серия: Гуманитарные науки. 2017. Т. 22. № 1 (165). С. 71–76.
14. Селютин В.Д., Соломатина Е.И. Методические основы введения понятия «вероятность события» при изучении процентов // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2012. № 2. С. 328–331.