УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВИЕТА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Анисова Т.Л.[1] , Евсеева О.А.[2], Чуев В.Ю.[1]

[1]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, e-mail: bolashova1@mail.ru*;
[2]*МИРЭА - Российский технологический университет, Москва, e-mail: ruru1001@mail.ru*

Решение задач с параметрами - одна из сложных тем курса алгебры средней школы. Задания на эту тему традиционно входят в единый государственный экзамен по математике. Однако опыт показывает, что учащиеся не всегда в достаточной мере владеют навыками решения задач с параметрами, часто допускают ошибки. В большинстве случаев это связано с неправильным выбором метода решения. Поэтому очень важно познакомить выпускников с различными подходами. Настоящая статья посвящена исследованию квадратных уравнений и сводящихся к ним систем уравнений, содержащих параметр, на некоторой области допустимых значений переменной. Подробно изложен метод решения для случаев, когда надо найти значения параметра, при которых уравнение или система уравнений имеет одно единственное решение, два различных решения или хотя бы одно решение. Установлено, что рассмотренный авторами метод решения с использованием теоремы Виета является менее затратным по сравнению с непосредственным нахождением корней, дальнейшей проверкой их попадания на область допустимых значений и последующим определением значений параметра, удовлетворяющего условию поставленной задачи. Метод позволяет избежать решения иррациональных неравенств в случае, когда дискриминант уравнения не является полным квадратом.

Ключевые слова: задачи с параметрами, математика в школе, подготовка к единому государственному экзамену (ЕГЭ), теорема Виета.

APPLICATION OF VIET'S THEOREM TO THE SOLUTION OF SOME PROBLEMS WITH PARAMETERS

Anisova T.L.[1], Evseva O.A.[2], Chuev V.Yu.[1]

[1] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, e-mail: bolashova1@mail.ru*;
[2] *MIREA - Russian Technological University, Moscow, e-mail: ruru1001@mail.ru*

Solving problems with parameters is one of the difficult topics of the school algebra course. Tasks on this topic are traditionally included in the unified state exam in mathematics. However, experience shows that students do not always have sufficient skills in solving problems with parameters, they often make mistakes. In most cases, this is due to the wrong choice of the solution method. Therefore, it is very important to introduce graduates to different approaches. This article is devoted to the study of quadratic equations and systems of equations that reduce to them, containing a parameter, on a certain range of admissible values of the variable. A solution method is presented in detail for cases when it is necessary to find the parameter values for which an equation or a system of equations has one unique solution, two different solutions, or at least one solution. It was found that the solution method considered by the authors using Viet's theorem is less expensive compared to the direct finding of the roots, further verification of their falling into the range of admissible values and the subsequent determination of the parameter values that satisfy the condition of the problem posed. The method allows you to avoid solving irrational inequalities in the case when the discriminant of the equation is not a perfect square.

Keywords: problems with parameters, mathematics at school, preparation for the Unified State Exam (USE), Viet's theorem.

Ежегодно в письменной части профильного единого государственного экзамена по математике выпускникам предлагается решить задачу с параметрами (задание 18) [1]. Это задание относится к высокому уровню сложности, оценивается в четыре первичных балла (максимальный балл из возможных). Согласно опубликованным данным анализа результатов ЕГЭ [2; 3], за последние пять лет видна растущая заинтересованность учащихся в правильном выполнении задания с параметрами.

Проведенный анализ школьных учебников и задачников по алгебре и началам анализа позволяет сделать следующие выводы.

В задачниках Мордковича А.Г. [4-5] и Виленкина Н.Я. [6] представлен достаточно большой объем упражнений, требующих умения применять различные методы решений заданий с параметрами. В учебнике Алимова Ш.А. [7] материал по методам решения задач с параметрами представлен незначительно. В основном рассматривается аналитический способ решения.

В учебнике Колмогорова А.Н. [8] задачи с параметрами включены в раздел «Повторение. Задачи повышенной трудности». Разобранных примеров, иллюстрирующих методы решения задач с параметрами, не приводится.

Наиболее большой спектр заданий с параметрами представлен в сборнике задач Галицкого М.Л. [9]. В нем содержатся уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств первого и второго порядка с параметрами, для решения которых можно применять аналитический и (или) графический методы решения. Задания располагаются в порядке повышения сложности.

В школьных учебниках практически отсутствуют объяснения решений задач с параметрами. Существует множество пособий по решению таких задач [10-13]. Заметим, что они в основном ориентированы на хорошо подготовленных учащихся, тогда как в школьных программах по математике задачам с параметрами отводится небольшое количество времени, рассматривается небольшой круг заданий.

Умение решать задачи с параметрами является одним из важнейших показателей уровня математической подготовки и глубины освоения материала. В школьной программе 8–11 классов задачи с параметрами обычно рассматриваются в конце каждой темы, что позволяет учащимся обобщать и структурировать полученные знания. Решение задач с параметрами развивает способность анализировать и формирует навыки логического мышления.

Нужно отметить, что задачи, содержащие параметр, очень разнообразны, и при их решении используются различные методы (графический, аналитический, перебор вариантов, комбинированный и т.д.). Наибольшую трудность для учащихся как раз составляет выбор «правильного» метода, позволяющего обоснованно и с наименьшими затратами выполнить решение задачи.

Цель исследования: показать необходимость изучения школьниками метода, основанного на применении теоремы Виета, для решения систем уравнений с параметрами, сводящихся к квадратному уравнению. При этом на область допустимых значений переменной (ОДЗ) накладывается определенное условие, определяемое из условия задачи.

Материал и методы исследования. Рассмотрим следующую задачу. Дана система уравнений, которая сводится к квадратному уравнению вида

$$x^2 + p(a)x + q(a) = 0 , \quad (1)$$

содержащему параметр a. При этом, исходя из условий задачи, область допустимых значений (ОДЗ) для неизвестной переменной x имеет вид $x > 0, x < 0$ (2)

либо $x \geq 0, (x \leq 0)$ (3).

Дискриминант уравнения равен $D = p^2(a) - 4q(a)$. Обозначим $x_б$ и $x_м$ соответственно больший и меньший корни уравнения (1).

Зачастую учащиеся пытаются непосредственно найти решения уравнения (1) и определить, при каких значениях параметра a на ОДЗ попадает нужное число решений. В этом случае задача сводится к решению иррационального неравенства либо системы иррациональных неравенств.

Если требуется найти значения параметра a, при которых уравнение (1) с ОДЗ (3) имеет два различных решения, получаем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_м = \dfrac{-p(a) - \sqrt{D}}{2} \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D > 0 \\ \sqrt{D} \leq -p(a) \end{cases}. \quad (4)$$

Если требуется найти значения параметра a, при которых уравнение (1) с ОДЗ (3) имеет единственное решение, приходим к следующей совокупности систем уравнений и неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D > 0 \\ x_б = \dfrac{-p(a) + \sqrt{D}}{2} \geq 0 \\ x_м = \dfrac{-p(a) - \sqrt{D}}{2} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} D = 0 \\ -p(a) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} D > 0 \\ \sqrt{D} \geq p(a) \\ \sqrt{D} > -p(a) \end{cases} \\ \begin{cases} D = 0 \\ p(a) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. . \quad (5)$$

Если же для уравнения (1) с ОДЗ (3) требуется найти значения параметра a, при которых оно имеет хотя бы одно решение, получаем

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_б = \dfrac{-p(a) + \sqrt{D}}{2} \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D \geq 0 \\ \sqrt{D} \geq p(a) \end{cases}. \quad (6)$$

В том случае, когда дискриминант уравнения (1) является полным квадратом, решение систем (4), (6) либо совокупности (5) не вызывает у выпускников трудностей. В противном случае само по себе решение иррациональных неравенств – сложная задача, ведь каждое из этих неравенств, в свою очередь, сводится к решению системы неравенств и приводит чаще всего к ряду ошибок.

Для уравнения (1) при ОДЗ $x > 0, x < 0, x \leq 0$ получаем аналогичную картину.

В пособиях [10; 12] для решения рассматриваемого класса задач используется графический метод, основанный на исследовании расположения корней квадратного трехчлена относительно нуля. Этот метод больше подходит учащимся с развитым визуальным восприятием.

Использование теоремы Виета подойдет учащимся, склонным к аналитическому мышлению. Предлагаемый метод позволяет, на наш взгляд, существенно упростить решение рассматриваемой задачи, избежав решения иррациональных неравенств.

Пусть дано квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0,$$

его дискриминант $D = p^2 - 4q \geq 0$, его корни x_1 и x_2. Тогда получаем следующие условия (таблица).

Соответствие между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами

$\{x_1 > 0\|$	$\{x_1 \geq 0\|$	$\{x_1 < 0\|$	$\{x_1 > 0\|$	$\{x_1 \geq 0\|$
$\{x_1 > 0\|$	$\{x_1 \leq 0\|$	$\{x_1 < 0\|$	$\{x_1 > 0\|$	$\{x_1 > 0\|$

Естественно, данная таблица не подлежит заучиванию. Учащимся необходимо объяснить механизм приведенных соответствий, следующих из теоремы Виета.

Используя соответствия, представленные в таблице, при решении выше поставленной задачи приходим к системам, не содержащим иррациональных неравенств.

Если требуется найти значения параметра a, для которых уравнение (1) при ОДЗ (3) имеет два различных решения, приходим к системе

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D > 0 \\ p(a) < 0 \\ q(a) \geq 0 \end{cases}.$$

Для нахождения значений параметра a, для которых уравнение (1) при ОДЗ (3) имеет единственное решение, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D>0 \\ x_1<0 \\ x_2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} D>0 \\ x_1<0 \\ x_2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} D=0 \\ x_1=x_2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} D>0 \\ q(a)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} D>0 \\ q(a)=0 \\ p(a)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} D=0 \\ p(a)\le 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Для нахождения значений параметра a, при которых уравнение (1) при ОДЗ (3) имеет хотя бы одно решение, получаем следующую совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D\ge 0 \\ x_1\ge 0 \\ x_2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} D\ge 0 \\ x_1\le 0 \\ x_2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} D\ge 0 \\ p(a)<0 \\ q(a)\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} D\ge 0 \\ q(a)\le 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Уравнение (1) при ОДЗ $x>0, x<0$ или $x\le 0$ исследуется аналогично.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Найти значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x+y)=1+\log_2 x \\ (x-a)^2+(y-x-a)^2=1 \end{cases} \qquad (7)$$

имеет а) два различных решения; б) единственное решение; в) хотя бы одно решение.

Решение. Из первого уравнения получаем

$$x>0 \Rightarrow \log_2(x+y)=\log_2 2x \Rightarrow x+y=2x \Rightarrow y=x .$$

Поскольку для каждого значения переменной x значение переменной y находится однозначно, то число решений системы (7) при каждом из значений параметра a соответствует числу решений системы

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-2ax+2a^2-1=0 \end{cases} . \qquad (8)$$

а) Система (8) имеет два различных решения при

$$\begin{cases} 4a^2-8a^2+1>0 \\ -2a<0 \\ 2a^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-a^2>0 \\ a>0 \\ a^2>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(-1;1) \\ a\in(0;+\infty) \\ a\in\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right) \end{cases}.$$

Окончательно, $a\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right)$.

б) Система (8) имеет единственное решение при

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-4a^2>0 \\ 2a^2-1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-4a^2>0 \\ -2a<0 \\ 2a^2-1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-4a^2=0 \\ -2a<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\in(-1;1) \\ a\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} a\in(-1;1) \\ a\in(0;+\infty) \\ a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\pm1 \\ a\in(0;+\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ a=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ a=1 \end{array}\right..$$

Окончательно, $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\{1\}$.

в) Система (8) имеет хотя бы одно решение при

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-4a^2\ge 0 \\ -2a<0 \\ 2a^2-1\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-4a^2\ge 0 \\ 2a^2-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\in[-1;1] \\ a\in(0;+\infty) \\ a\in\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right) \end{cases} \\ \begin{cases} a\in[-1;1] \\ a\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right] \\ a\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}\right..$$

Окончательно, $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$.

Находя корни квадратного уравнения непосредственно, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = 1 - a^2 \geq 0 \\ x_б = a + \sqrt{1 - a^2} > 0 \end{cases}$$

содержащую иррациональное неравенство.

<u>Пример 2</u>. Найти значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + |x| + (y-5)^2 = 0 \\ (x-a)^2 + a = y + 15 \end{cases} \qquad (9)$$

имеет

а) два различных решения; б) единственное решение; в) хотя бы одно решение.

<u>Решение</u>. Поскольку при $x > 0$ первое уравнение системы не имеет решений, то рассматриваем только $x \leq 0$. Тогда из первого уравнения системы

$$(y-5)^2 = 0 \Rightarrow y = 5$$

и второе уравнение имеет вид

$$x^2 - 2ax + a^2 + a - 20 = 0.$$

Задача свелась к нахождению числа решений системы

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 2ax + a^2 + a - 20 = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

в зависимости от параметра a.

а) Система (10) имеет два различных решения, если

$$\begin{cases} 20 - a > 0 \\ -2a > 0 \\ a^2 + a - 20 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 20 \\ a < 0 \\ (a+5)(a-4) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 20) \\ a \in (-\infty; 0) \\ a \in (-\infty; -5] \cup [4; +\infty) \end{cases}.$$

Окончательно, $a \in (-\infty; -5]$.

б) Система (10) имеет единственное решение при

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}20-a>0\\ a^2+a-20<0\end{cases}\\ \begin{cases}20-a>0\\ -2a<0\\ a^2+a-20=0\end{cases}\\ \begin{cases}20-a=0\\ -2a>0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\infty;20)\\ a\in(-5;4)\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-\infty;20)\\ a\in(0;+\infty)\\ \left[\begin{array}{l}a=-5\\ a=4\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a=20\\ a\in(-\infty;0)\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a\in(-5;4)\\ a=4\\ a\in\varnothing\end{array}\right..$$

Окончательно, $a\in(-5;4]$.

в) Система (10) имеет хотя бы одно решение при

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}20-a>0\\ -2a>0\\ a^2+a-20\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}20-a>0\\ a^2+a-20\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\infty;20]\\ a\in(-\infty;0)\\ a\in(-\infty;-5]\cup[4;+\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-\infty;20]\\ a\in[-5;4]\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a\in(-\infty;-5]\\ a\in[-5;4]\end{array}\right..$$

Окончательно, $a\in(-\infty;4]$.

Заключение. Предложенный в статье метод решения задач достаточно легко усваивается учащимися. Навык использования теоремы Виета быстро развивается. Такой способ решения подойдет учащимся, склонным к аналитическому мышлению. Отметим, что важно познакомить выпускников со всеми методами решения задач с параметрами, поскольку зачастую при решении таких задач используется комбинированный подход.

Приведенные примеры иллюстрируют преимущество данного метода по сравнению с непосредственным нахождением корней, дальнейшей проверкой их попадания на ОДЗ и последующим определением значений параметра, удовлетворяющих условию поставленной задачи. При использовании данного метода, в отличие от стандартного метода, отпадает необходимость решения одного или нескольких иррациональных неравенств.

Список литературы

1. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». [Электронный ресурс]. URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2 (дата обращения: 17.05.2021).

2. Ященко И.В., Семенов А.В., Высоцкий И.Р. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типовых ошибок участников ЕГЭ 2020 года по математике // Педагогические измерения. 2020. № 3. С.17.

3. Ледовских И.А., Горбанева Л.В., Жулидова Ю.В. Задачи с параметрами: с чего начать // Международный научно-исследовательский журнал. 2020. Вып. № 11 (101). [Электронный ресурс]. URL: https://research-journal.org/pedagogy/zadachi-s-parametrami-s-chego-nachat/ (дата обращения: 14.05.2021).

4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В двух частях. Ч.2: задачник (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2020. 348 с.

5. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В двух частях. Ч.2: задачник (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2020. 333 с.

6. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень. М.: Мнемозина, 2015. 312 с.

7. Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 класса средней школы. М.: Просвещение, 2020. 463 с.

8. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 класса средней школы. М.: Просвещение, 2020. 320 с.

9. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 2020. 271с.

10. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005. 328 с.

11. Шабунин М.И. Математика. Пособие для поступающих в вузы. М.: Лаборатория знаний: Лаборатория Базовых Знаний, 2016. 744 с.

12. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. М.: МЦНМО, 2007. 296 с.

13. Шахмейстер А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами. СПб.: «Виктория плюс»: М.: МЦНМО: СПб.: «Петроглиф», 2019. 304 с.