УДК 378.14:004.94

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГРАФОАНАЛИЗАТОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УЧЕБНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНОГО И ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Медведев А.В.

ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет», Кемерово, e-mail: alexm_62@mail.ru

В работе описан авторский автоматизированный программный комплекс многопараметрического анализа математических функций одной переменной с параметрическим заданием их коэффициентов, показателей степеней и оснований, фаз, амплитуд и других характеристик, а также опыт применения указанного комплекса для обучения решению и анализу ряда прикладных задач естественно-научного и экономического содержания. Приведен краткий перечень и дана характеристика имеющихся на рынке программных продуктов математического анализа функций, имеющих ряд недостатков, связанных с неудобством, невысокой эффективностью или даже отсутствием полноценных возможностей решения задач многопараметрического анализа функций. Представлена полная классификация дробно-квадратичной функции, имеющей важные и разнообразные приложения в экономике, физике, механике и других областях знаний и допускающей эффективные аналитические и численные методы своего исследования. Помимо полной классификации, приводится иллюстрация соответствующих всем классификационным случаям графиков, а также приведен пример, описывающий методику анализа дробно-квадратичной функции с применением графоанализатора. Сделан вывод о целесообразности и эффективности использования подобных вычислительно-аналитических комплексов, в условиях цифровизации всех сфер современной жизни, не только для решения учебных задач в системе образования, но и для целей оперативного анализа информации и извлечения знаний из заданных в параметрической форме математических соотношений, используемых в широких областях человеческих интересов.

Ключевые слова: автоматизированный анализ учебных задач, графоанализатор, функция, многопараметрический анализ, дробно-квадратичная функция, классификация, корни, перегибы, точки разрыва, методика параметрического анализа прикладных задач.

APPLICATION OF A PARAMETRIC GRAPHO ANALYZER TO SOLVE EDUCATIONAL AND APPLIED PROBLEMS OF NATURAL SCIENTIFIC AND ECONOMIC CONTENT

Medvedev A.V.

Kemerovo State University, Kemerovo, e-mail: alexm_62@mail.ru

The paper describes the author's automated software complex for multivariate analysis of mathematical functions of one variable with parametric assignment of their coefficients, exponents and bases, phases, amplitudes and other characteristics, as well as the experience of using this complex for teaching the solution and analysis of a number of applied problems of natural science and economic content. A short list and characteristics of the available on the market software products for mathematical analysis of functions that have a number of disadvantages associated with inconvenience, low efficiency, or even lack of full-fledged possibilities for solving problems of multivariable analysis of functions are given. A complete classification of the fractional-quadratic function is presented, which has important and diverse applications in economics, physics, mechanics and other fields of knowledge and allows effective analytical and numerical methods of its research. In addition to the complete classification, an illustration of the graphs corresponding to all classification cases is given, as well as an example describing the method of analyzing a fractional-quadratic function using a graph analyzer. The conclusion is made about the feasibility and efficiency of using such computational and analytical complexes, in the context of digitalization of all spheres of modern life, not only for solving educational problems in the education system, but also for the purposes of operational analysis of information and extraction of knowledge from mathematical relationships specified in a parametric form, used in broad areas of human interest.

Keywords: automated analysis of educational tasks, graph analyzer, function, multivariate analysis, fractional-quadratic function, classification, roots, inflections, break points, methods of parametric analysis of applied problems.

В условиях цифровизации всех сфер современной жизни применение методов обучения автоматизированному анализу различных закономерностей в природе и обществе является необходимым условием качественной подготовки обучающихся в самых разных отраслях знаний как естественно-научного, так и социально-экономического направлений. Это предопределено тем фактом, что аналитическое исследование функций, описывающих указанные закономерности, является зачастую излишне затратным для исследователя как по времени, так и по интеллектуальным усилиям, а в некоторых случаях необходимо рассматривать такое огромное количество всевозможных вариантов и комбинаций параметров, что человеку данная задача становится не под силу, тем самым снижается эффективность принимаемых им решений. В этих случаях, очевидно, и целесообразно применение численных методов и алгоритмов анализа функций и компьютерной обработки соответствующей информации. Хотя численные методы не всегда дают верные ответы на возникающие у исследователя вопросы (в силу, например, возможного накопления компьютером ошибок округления), но они помогают реализовать необходимые исследовательские действия в течение долей секунды там, где человеку для получения решения задачи пришлось бы потратить несопоставимо больше времени без их применения. Кроме того, точности графоаналитических методов, как правило, с запасом хватает для анализа многих прикладных задач.

Материалы и методы исследования

Наиболее эффективным для анализа математических функций с целью общности исследования и скорейшего выявления их свойств является метод задания их коэффициентов, показателей степеней и оснований, фаз, амплитуд и других характеристик в параметрическом виде. Любая функциональная зависимость может быть задана в виде уравнения: $F(x,y,\ldots,t,\ldots;a,b,\ldots)=0$, где $x,y,\ldots,t,\ldots$ – множество переменных аргументов, $a,b,\ldots$ – множество параметрических аргументов функции F. В качестве F рассматриваются элементарные математические функции – степенные (многочлены, рациональные, иррациональные), тригонометрические, показательные и логарифмические, а также их комбинации (сложные функции), когда эти характеристики задаются в виде параметров. Отметим, что под параметром понимается такой математический объект, который обладает одновременно свойством классических переменных величин принимать любое допустимое числовое значение и свойством констант иметь фиксированное числовое значение. Например, в выражении для квадратного трехчлена ax^2+bx+c символы a, b, c – параметры, x – переменная, 2 – константа. Под параметрическим анализом задачи будем понимать полный или частичный анализ рассматриваемых в ней функций, соотношений и их взаимодействия с точки зрения перебора допустимых значений параметров и получения критических точек (корней, экстремумов, разрывов, порогов) и интервалов (диапазонов изменения) функций.

Исследования прикладных задач, описывающих реальные объекты и процессы в виде математических формул, имеют глубокую историю и широчайший круг областей знаний, в которых эти исследования осуществляются. Однако история применения численных методов компьютерного анализа едва преодолела половину века. В настоящее время существует значительное количество зарекомендовавших себя на рынке математических пакетов, обзор которых приведен, например, в [1; 2]: Derive, Mathematica, MathCad, MATLAB, Maple и многие другие. При решении широкого круга математических задач (начиная от анализа функций и решения математических соотношений и их систем, заканчивая решением дифференциальных, интегральных, матричных, вариационных, статистических задач, включая оптимизационные и другие классы) каждый из указанных программных комплексов имеет свои преимущества и недостатки. К некоторым из существенных, на наш взгляд, недостатков перечисленных комплексов относится неудобство, невысокая эффективность или даже отсутствие полноценных возможностей решения задач многопараметрического анализа функций. В этой связи целью данной статьи является описание возможностей программного комплекса [3] (далее графического анализатора, графоанализатора), предназначенного для параметрического анализа нескольких функций с несколькими параметрами, в том числе общими для функций, в режиме реального времени, со скоростью до нескольких десятков перебираемых значений параметра в секунду. Указанный комплекс обладает набором возможностей для исследования параметрических соотношений, заданных в R^2 в следующих формах: 1) $y=f(x)$; 2) $x=f(y)$; 3) в однопараметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$ с параметром t; 4) в полярной системе координат $r=r(\varphi)$, где φ – угол между горизонтальной осью и исходящим из начала отсчета радиус-вектором длины r; 5) в виде неравенств $f(x)\sim g(x)$, где символ «~» соответствует одному из четырех знаков неравенства; 6) в табличном виде. К основным отличительным свойствам комплекса относятся возможности автоматического распознавания переменных и использования практически не ограниченного количества параметров, их изменение в ручном и автоматическом режимах. Кроме того, он позволяет находить корни и точки пересечения функций, уравнения касательных, вычислять определенные интегралы, исследовать системы уравнений и неравенств с общими параметрами на общем графическом поле, решать другие полезные для математического анализа функций задачи. Пакет также обладает ключевым преимуществом других графических пакетов, заключающимся в возможности приближенного определения корней алгебраических соотношений, которые невозможно или затратно получать аналитически (например, когда необходимо найти корни полинома степени выше 2-й или в соотношении одновременно присутствуют функции разных классов – степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрическая и т.п.). Программный комплекс содержит такие инструменты работы с графиками, изображениями и результатами анализа, как: 1) масштабирование и перемещение координатной плоскости; 2) сохранение конфигураций графика в файл с возможностью последующей загрузки; 3) скриншот и сохранение числовой аналитической информации; 4) гибкая настройка интерфейса (изменение вида координатной плоскости, цветов, способа отображения и другое) отдельно для каждого документа; 5) проверка синтаксиса формул при их вводе и многие другие стандартные возможности компьютерной обработки. Основными достоинствами графического анализатора состоят в том, что он позволяет оперативно визуализировать и динамически анализировать изучаемые объекты и процессы путем построения и многопараметрического исследования функций, имеет программный интерфейс, интуитивно понятный для освоения обучающимися образовательных организаций основного, профессионального и высшего образования.

Суть концепции и идеи системного использования графоанализатора для решения различных прикладных задач изложена в работе [4] достаточно давно, однако его применение оставалось на уровне учреждений среднего образования для решения, как правило, учебных задач естественно-научного цикла, и результаты соответствующих исследований широко опубликованы не были. Активное использование пакета в учреждениях высшего образования началось в середине 2010-х годов с применения его в экономико-математических моделях, в том числе при решении оптимизационных задач. Следует отметить, что наилучший эффект при анализе прикладных задач достигается в случае возможности комбинирования численно-графических и аналитических методов их решения. В этой связи с помощью комплекса [3] далее производятся анализ и классификация такого класса сложных функций, как дробно-квадратичная функция (ДКФ), которая имеет широкие приложения в различных областях знаний, с одной стороны, и допускает как аналитические, так и численные методы исследования – с другой.

Результаты исследования и их обсуждение

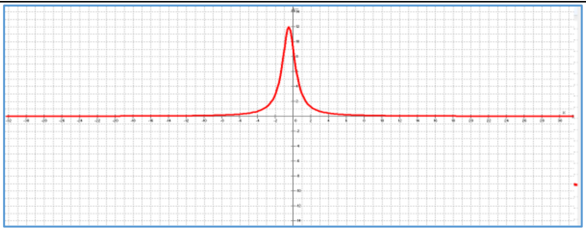
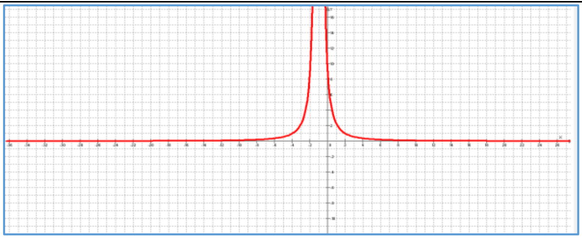
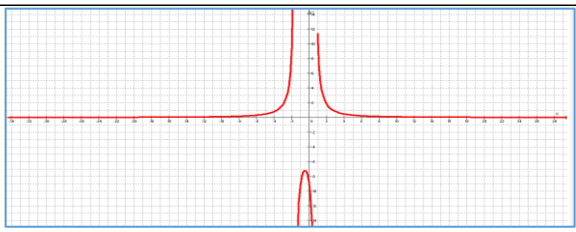
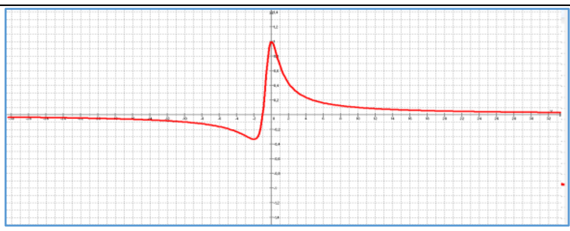
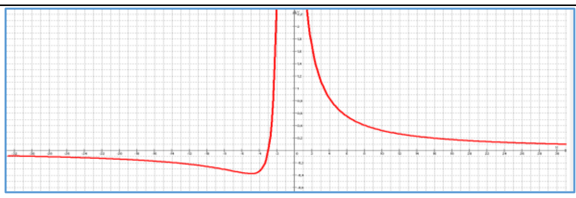
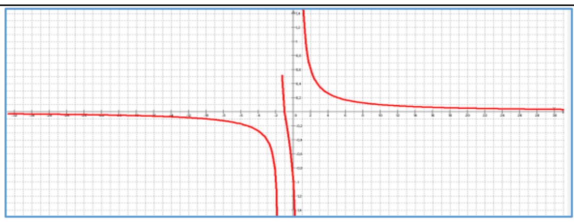
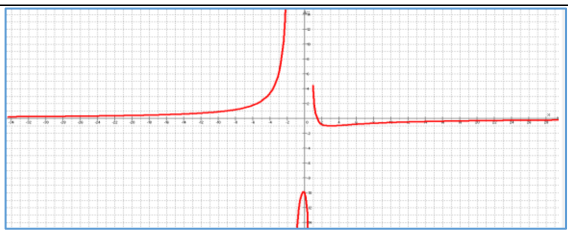
Рассмотрим дробно-квадратичную функцию, представленную в общем параметрическом виде: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+k}$. В своих частных проявлениях данная функция имеет широчайший круг приложений. Например, при d=e=0 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{k}$ является обычной параболой (многочленом второй степени), широко применяемой в математике за счет возможности ее полного исследования элементарными методами. При a=d=0 $f(x)=\dfrac{bx+c}{ex+k}$ представляет собой дробно-линейную функцию, используемую в различных приложениях математики в биологии, физике, экономике, в том числе при решении задач оптимизации, а при a=c=d=0 $f(x)=\dfrac{bx}{ex+k}$ можно подобрать значения оставшихся параметров, при которых она достаточно точно, в некоторой локальной области, описывает логистическую кривую $Q(x)=K/(1+C*e^{D/x})$, используемую в экономической теории для описания, например, связи между доходом и спросом экономических агентов. Описание некоторых свойств ДКФ можно найти в статье [5], а также на электронном ресурсе [6]. Вместе с тем в указанных источниках отсутствуют примеры практического применения ДКФ при анализе прикладных задач. В других же литературных источниках информация о ДКФ не выходит за рамки исследования функций значениями с конкретными коэффициентами или графических иллюстраций с однопараметрическим анализом.

Начнем классификацию ДКФ, исходя из наличия у нее наклонных асимптот. Пусть коэффициенты a и d одновременно не равны нулю, причем многочлены в числителе и знаменателе не пропорциональны и не имеют общих корней, то есть дробь несократима на линейный множитель. Тогда все такие функции можно разделить на две группы: 1) $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+k}; d\neq 0$; 2) $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{ex+k}$; d=0; e≠0. Далее общность свойств ДКФ в обеих группах определим наличием сингулярностей функции в точках, в которых ее знаменатели принимают нулевые значения, что регулируется знаком дискриминанта $D=e^2–4dk$, а также наличием корня линейной функции в знаменателе 2). В этой связи все ДКФ первой группы можно разделить на три подгруппы, ставя в основу деления условия: 1) D>0; 2) D=0; 3) D<0, а ДКФ второй группы – на случаи наличия или отсутствия корня знаменателя. Путем формального деления числителя на знаменатель дроби ДКФ приведем ее к следующим видам: $f_1(x)=\dfrac{a}{d}+\dfrac{\frac{bd-ae}{d}x+\frac{cd-ak}{d}}{dx^2+ex+k}$ (первая группа) и $f_2(x)=\dfrac{a}{e}x+\dfrac{be-ak}{e^2}+\dfrac{\frac{ce^2-bek+ak^2}{e^2}}{ex+k}$ (вторая группа). Если переобозначить некоторые числовые коэффициенты в выражениях для $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то они примут, соответственно, вид $f_1(x)=\alpha_1+\dfrac{\beta_1 x+\gamma_1}{dx^2+ex+k}$ и $f_2(x)=\alpha_2 x+\beta_2+\dfrac{\gamma_2}{ex+k}$. Для $f_1(x)$ возможны две разновидности функций: 1) β_1=0; 2) β_1≠0. В приведенной ниже таблице 1 соответствующие графики $f_1(x)$ построены с помощью [3] и проиллюстрированы при конкретных значениях параметров α_1, β_1, γ_1, d, e, k.

Таблица 1

Классификация функций вида $f_1(x)$

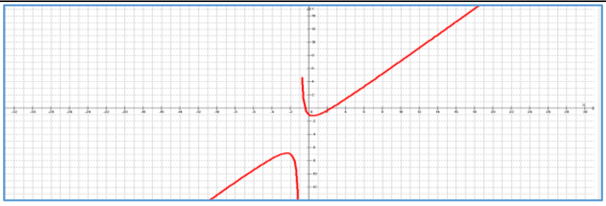
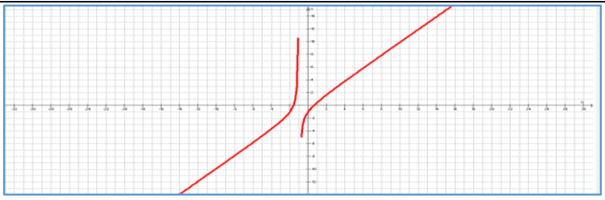
α_1	β_1	γ_1	d	e	k	Комментарий	Общий вид графика

0	0	9	1	1	1	0 корней знаменателя, 1 экстремум, 2 смены выпуклости	
0	0	9	1	2	1	1 корень знаменателя, без экстремумов, 1 смена выпуклости	
0	0	9	1	1	-1	2 корня знаменателя, 1 экстремум, 3 смены выпуклости	
0	1	1	1	1	1	0 корней знаменателя, 2 экстремума, 4 смены выпуклости	
0	3	9	1	2	1	1 корень знаменателя, 1 экстремум, 3 смены выпуклости	
0	1	1	1	1	-1	2 корня знаменателя, без экстремумов, 4 смены выпуклости	
0	-7	10	1	1	-1	2 корня знаменателя, 2 экстремума, 4 смены выпуклости	

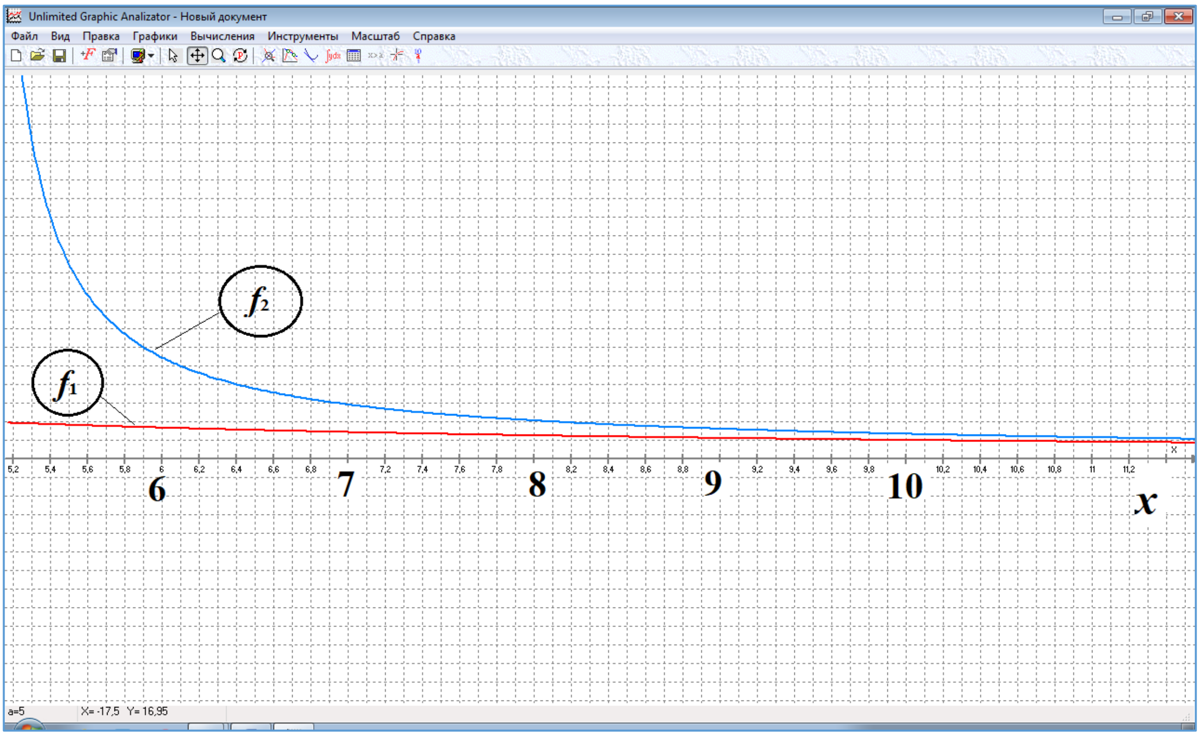
Для функций $f_2(x)$ соответствующая классификация представлена в таблице 2.

Таблица 2

Классификация функций $f_2(x)$

α_2	β_2	γ_2	e	k	Комментарий	Общий вид графика
1	0	1	1	1	1 корень знаменателя, 2 экстремума, 1 смена выпуклости	
1	0	-1	1	1	1 корень знаменателя, нет экстремумов, 1 смена выпуклости	

Рассмотрим далее практический пример обучающего характера и приведем методику его анализа с использованием дробно-квадратичной функции и графоанализатора. Пусть у производственного предприятия имеется возможность извлечь из некоторого бизнеса экономический потенциал в размере W денежных единиц (д.е.) путем реализации двух альтернативных сценариев: 1) при условии равномерных усилий w д.е. в единицу времени (ед. вр.) и 2) при условии, что половину потенциала оно будет функционировать с уменьшенными (увеличенными) на c д.е./ед.вр. усилиями, а вторую половину – соответственно с увеличенными (уменьшенными) на ту же величину c усилиями. Требуется ответить на вопрос, какой из вариантов приведет к скорейшему достижению экономического потенциала W. Сформулированная задача может быть решена аналитически, но допускает и оперативный ответ на вопрос с использованием пакета [3]. С этой целью достаточно построить и визуально сравнить [7] две функции: $F_1(w)=W/w$ и $F_2(w)=W/(w^2–a^2)$. Методика применения графоанализатора в данном случае имеет следующий алгоритм. В нотации пакета [3] строятся две функции: a*/(b*x+0.0001) и a/(x^2-c^2), соответствующие частным случаям рассмотренной выше ДКФ. При этом слагаемое +0.0001 используется в знаменателе первой функции, чтобы избежать деления на ноль при инициировании работы программы, и практически не влияет на точность получаемых зависимостей. Перебирая средствами пакета значения параметра c при фиксированных значениях параметров a и b, из фрагментов графиков на рисунке убеждаемся, что для всех значений переменной w и параметра c выполняется неравенство $F_1(w)<F_2(w)$, что, очевидно, свидетельствует в пользу равномерных усилий предприятия для достижения своего экономического потенциала. Анализ задачи при этом занимает незначительное время (не более нескольких минут для внесения формул и миллисекунды для варьирования значениями параметров), что позволяет многократно использовать его в процессе проведения учебных занятий в образовательных учреждениях.



Графики временных затрат сценариев (a - любое положительное число, b=1, c=5)

Заключение

Свойства ДКФ, связанные с наличием асимптот, количеством точек разрыва промежутков монотонности и смен выпуклости, в частности, определяют и свойства решений прикладных задач с описываемыми ДКФ моделями, соответствующие примеры анализа которых с использованием графоанализатора рассмотрены в работах [7-10]. Таким образом, с учетом описанных возможностей графоанализатора [3] очевидны целесообразность и эффективность применения подобных вычислительно-аналитических комплексов для анализа различных закономерностей изучаемых в образовательных учреждениях явлений и процессов.

Список литературы

1. Обзор некоторых математических пакетов. [Электронный ресурс]. URL: https://life-prog.ru (дата обращения: 10.09.2021).
2. Математические, научные и прикладные программы. [Электронный ресурс]. URL: http://getsoft.ru/scientific/math/?sortprograms=pd (дата обращения: 10.09.2021).
3. Медведев А.В., Смольянинов А.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2004611968, РФ. Графический анализатор математических функций и решений алгебраических соотношений с параметрами: опубл. 26.08.2004.

4. Кривобоков В.Н., Медведев А.В., Смольянинов А.В. Обучающий комплекс по решению задач параметрического анализа в предметах естественнонаучного цикла // Образовательные технологии. 2005. № 1. С. 21-25.

5. Дворянинов С.В. О графиках сложных и дробно-квадратичных функций / С.В. Дворянинов // Математика в школе. 2018. № 1. С. 33-38.

6. Шишлянникова А.В. Дробно-квадратичная функция. [Электронный ресурс]. URL: https://urok.1sept.ru/articles/412547 (дата обращения: 10.09.2021).

7. Медведев А.В., Муравьев С.А., Пинаев В.А., Славолюбова Я.В. О некоторых приложениях инструментария многопараметрического анализа функций в ситуационных центрах социально-экономического развития // Фундаментальные исследования. 2017. № 4(2). С. 271-275.

8. Семенов Н.Д., Чиркин А.Н. Об одном пакете оперативной поддержки принятия решений при анализе задачи линейного программирования // Европейские научные исследования: сборник статей победителей II международной научно-практической конференции. Пенза: Наука и Просвещение, 2017. С. 90-92.

9. Камалидинова А.К. К разработке обучающего комплекса по решению задач параметрического анализа в предметах естественнонаучного цикла // Актуальные проблемы современного образования: опыт и инновации: материалы Всероссийской научно-практической конференции с дистанционным и международным участием. Ульяновск: Изд-во «Зебра», 2020. С. 424-429.

10. Бурдин А.С. Дуванов И.О., Фабрицин Г.Е. Исследование гамма-функции Эйлера как модели оценки эффективности инвестиционных проектов с применением параметрического графоанализатора // Формирование конкурентной среды, конкурентоспособность и стратегическое управление предприятиями, организациями и регионами: сборник статей VI Международной научно-практической конференции. Пенза: Пензенский государственный аграрный университет, 2021. С. 39-42.