УДК 372.851

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Воистинова Г.Х.

Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», Стерлитамак, e-mail: voistinova69@mail.ru

В данной статье проведен краткий анализ методической литературы, посвященной актуальной проблеме решения нестандартных уравнений, приведены методические указания по обучению школьников решению нестандартных уравнений и организации поиска такого решения с помощью наводящих вопросов. В ходе проведенного исследования и опыта работы со школьниками на семинаре «Подготовка к единому государственному экзамену по математике профильного уровня» для учителей и учащихся 10-11 классов было выявлено, что наибольшую трудность вызывает поиск решения нестандартных уравнений, содержащих несколько функций. По мнению автора, использование стандартных методов не всегда позволяет решить уравнения такого вида. Однако проблема обучения поиску решения нестандартных уравнений в научно-методической и учебной литературе не достаточно разработана. Многочисленные задачники содержат различные примеры решения нестандартных уравнений без подробного их анализа и методических рекомендаций по организации поиска их решения. Автором предложены методические рекомендации по обучению учащихся поиску решения нестандартных уравнений с помощью системы наводящих вопросов и некоторые нестандартные методы их решения, в частности метод оценки, аналитико-функциональный метод и использование однородности.

Ключевые слова: решение уравнения, метод оценки, область определения, область значений, методы решения.

METHODOLOGICAL RECOMMENDATIONS FOR SOLVING NON-STANDARD EQUATIONS

Voistinova G.H.

Sterlitamak Branch of Federal State Budgetary Educational Institution «Bashkir State University», Sterlitamak, e-mail: voistinova69@mail.ru

This article provides a brief analysis of the literature on the topical problem of solving non-standard equations, provides guidelines for teaching schoolchildren to solve non-standard equations and organizing the search for such a solution. In the course of the study and the experience of working with schoolchildren at the seminar "preparing for the exam" for teachers and students in grades 10-11, it was revealed that the greatest difficulty is the search for solutions to non-standard equations containing several functions. According to the author, the use of standard methods does not always allow solving equations of this type. However, the problem of teaching the search for solutions to non-standard equations in the scientific, methodological and educational literature is not sufficiently developed. Numerous problem books contain various examples of solving non-standard equations without their detailed analysis and methodological recommendations for organizing the search for their solution. The author proposes methodological recommendations for teaching students to find solutions to non-standard equations using a system of leading questions and some non-standard methods for their solution, in particular, the assessment method, analytical-functional method and the use of homogeneity.

Keywords: equation solution, estimation method, domain of definition, domain of values, solution methods.

Опыт работы показывает, что часто сложный вид уравнения пугает школьников, и многие из них даже не приступают к решению, те же, кто всё-таки приступил к решению, пытаются безуспешно использовать известные методы решения без учета анализа самого уравнения. Ознакомление обучающихся с некоторыми методическими рекомендациями позволит избежать этой проблемы и вооружит их определенными приемами решения нестандартных уравнений.

Цель исследования – разработка методических рекомендаций по обучению учащихся поиску решения нестандартных уравнений.

Материал и методы исследования. Методы исследования носили комплексный характер, среди них выделялись теоретические методы: анализ научно-методических статей и учебных пособий, анализ учебников и задачников по алгебре, алгебре и началам анализа и эмпирические методы: анкетирование школьников и учителей математики, наблюдение за процессом поиска решения нестандартных уравнений, а также педагогический эксперимент.

Проведенный анализ показал, что существует ряд исследований, посвященных обучению решению нестандартных уравнений (Ю.М. Колягин, И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев, Г.В. Дорофеев, Г.К. Муравин, А.Г. Мерзляк, О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев и др.). Однако проблема обучения поиску решения нестандартных уравнений в научно-методической и учебной литературе не достаточно разработана. Многочисленные задачники [1-3] содержат различные примеры решения нестандартных уравнений без подробного их анализа и методических рекомендаций по организации поиска их решения.

Одна из важных рекомендаций методистов [4-6] при решении задач: прежде чем приступить к решению задачи, следует начать с анализа данных, представленных в этой задаче. Не является исключением и процесс поиска решения нестандартных уравнений. Если стандартные уравнения еще допускают поспешных действий, то при решении нестандартных уравнений такая спешка ни к чему хорошему не приведет. Необходимы не только стандартные, но и нестандартные приемы решения уравнений.

Анализ литературы показал, что под нестандартным приемом решения уравнений в методической литературе [7; 8] понимают прием решения уравнений, в котором основную роль при переходе к равносильным уравнениям и неравенствам играют свойства функций (монотонность, четность, нечетность, периодичность и др.). Л.К. Садыкова [9], Л.С. Капкаева [10] выделяют функциональные приемы решения уравнений и неравенств, знакомство с которыми позволит учащимся быть более успешными при решении нестандартных уравнений.

Приведем материалы выступления автора статьи перед учителями и учащимися 10-11 классов на семинаре по подготовке к ЕГЭ, некоторые рекомендации приведены автором в статье [5, с. 214].

- Решить уравнение: $\sqrt{5x - x^2 - 6} + 3^{\sqrt{x-\pi}} = \sqrt{1 - 3x}$.

Как видим, в уравнении участвуют три различные функции. Применение известных методов не позволило школьникам найти решение самостоятельно. Действия тех, кто приступил к решению, сводились только к возведению обеих частей уравнения в квадрат, что, конечно, ни к чему хорошему не привело. Наличие показательной функции не позволяет упростить уравнение возведением в квадрат. И только с помощью наводящих вопросов, организованных в ходе поиска решения уравнения и анализа его данных, некоторые обучающиеся начали выделять функции, входящие в него, и обдумывать условия существования решения уравнения, т.е. приступили к анализу области определения.

После нахождения области определения обучающиеся выяснили:

а) $\sqrt{5x - x^2 - 6}$ существует при х, принадлежащих промежутку [2; 3];

б)$3^{\sqrt{x-\pi}}$ – при х из промежутка [π, +∞);

в) $\sqrt{1 - 3x}$ – при х из промежутка $(-\infty, \frac{1}{3}]$.

Данные промежутки не пересекаются, следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

1. Решить уравнение: $\sqrt{-x^2 + 5x - 6} = 4^{\sqrt{x-3}} - 1$.

Окрыленные успехами после первого уравнения, большинство учащихся начинали свое решение с анализа области допустимых значений. Этот поиск привел к тому, что область допустимых значений состоит всего лишь из одного числа 3. Это свидетельствует о том, что если решение существует, то только при х=3. Простая проверка с помощью подстановки х=3 в уравнение позволяет найти окончательный ответ: х=3 – корень уравнения.

Ответ: х=3.

2. Решить уравнение: $2sin^2\frac{x}{6}cos^2\frac{x}{12} = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Аналогичные действия при решении данного уравнения не дают ожидаемого результата, так как область определения – это все числа, кроме 0. Но часть обучающихся не спешит сразу использовать известные методы и после наводящих вопросов приходит к выводу, что можно анализировать не только область определения, но и область значений функций, входящих в уравнение.

Оценивая левую часть уравнения, ученики приходят к выводу, что $2sin^2\frac{x}{6}cos^2\frac{x}{12} \le 2$, т.е. левая часть не больше 2. Аналогичный анализ правой части дает неравенство: $x^2 + \frac{1}{x^2} \ge 2$, т.е. правая часть не меньше 2. Единственно возможное решение, когда левая часть равна правой части и равна 2. Решим уравнение: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$. Корни уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Подставив их в левую часть уравнения, убеждаемся, что эти числа не удовлетворяют, т.е. уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Далее ученикам были предложены шесть уравнений:

3. $5sin^2x - 2sinxcosx - 3cos^2x = 0$.

4. $3x^2 - 2xy - y^2 = 0$.

5. $4^x - 7*36^x = 18*18^{2x}$.

6. $8y^3 + 11x^2y - y^2x - 18x^3 = 0$.

7. $x + 6 - 4\sqrt{x^2 + 4x - 12} = 8 - 4x$.

8. $5 * 4^x - 2*2^x log_2 x - 3log^2{}_2 x = 0$.

Все уравнения являются однородными, но, к сожалению, никто из школьников этого не заметил. Большинство учеников решили первое уравнение, однако не смогли заметить, что остальные пять уравнений также являются однородными. Безуспешные попытки применить различные методы решения привели школьников к мысли, что снова следует начать с анализа уравнения. Однако анализ области определения и области значений не дал желаемого результата. Но часть школьников, уяснивших основную идею – прежде чем начать решение нестандартного уравнения, проанализируй его – пришли к выводу, что следует изучить сами уравнения и функции, входящие в них.

Наводящие вопросы подвели школьников к поиску сходства между предложенными уравнениями. В ходе обсуждения общего вида однородного тригонометрического уравнения и выделения алгоритма его решения ученики пришли к общему виду однородного уравнения второй степени: $Af^2(x) + Bf(x)g(x) + Cg^2(x) = 0$ и способа решения таких уравнений.

После такой предварительной работы школьники смогли решить предложенные уравнения.

Рассмотрим решение уравнения: $3x^2 - 2xy - y^2 = 0$.

1) При $y^2 = 0$, x = 0, т.е. (0, 0) – решение уравнения.

2) Пусть теперь $y^2 \neq 0$, разделим обе части уравнения на y^2:

$3\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{xy}{y^2} - \frac{y^2}{y^2} = 0$, преобразуем уравнение к виду:

$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{y^2}{y^2} - 1 = 0$ и введем замену.

Пусть $\frac{x}{y}$ = t. Тогда $3t^2 - 2t - 1 = 0$.

$\frac{D}{4} = 1 + 3 = 4$, тогда t1 = 1, t2 = $-\frac{1}{3}$, возвращаясь к замене, получим следующие корни уравнения: $\frac{x}{y} = 1$ или $\frac{x}{y} = -\frac{1}{3}$.

Ответ: x = y, x = $-\frac{1}{3}$y.

Рассмотрим уравнение: $4^x - 7*36^x - 18*18^{2x} = 0$. Преобразуем уравнение к виду:

$2^{2x} - 7*18^x*2^x - 18*18^{2x} = 0$. Разделим обе части уравнения на $18^{2x} \neq 0$.

Получим уравнение: $\frac{2^{2x}}{18^{2x}} - 7\frac{2^x}{18^x} - 18 = 0$. Преобразуем уравнение к виду:

$\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} - 7\left(\frac{1}{9}\right)^{x} - 18 = 0$.

Пусть t $=\left(\frac{1}{9}\right)^{x}$, t> 0. Получим уравнение: $t^2 - 7t - 18 = 0$.

По т. Виета найдем корни: $t_1 = 9$, $t_2 = -2$ – не удовлетворяет.

Вернемся к замене $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 9$, $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

В ходе обсуждения с учениками аналогично приходим к общему виду однородного уравнения третьей степени: $Af^3(x) + Bf^2(x)g(x) + Cf(x)g^2(x) + Dg^3(x) = 0$.

Решение уравнения $8y^3 + 11x^2y - y^2x - 18x^3 = 0$ уже не вызывает особой трудности, так как учениками теперь усвоен способ их решения:

1) Если $x = 0$, то $y = 0$, т.е. $(0, 0)$ – решение уравнения.

2) Пусть $x \neq 0$, разделим обе части уравнения на x^3

$8\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 11\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 18 = 0.$

Пусть $t = \frac{y}{x}$, тогда получим кубическое уравнение:

$8t^3 - t^2 + 11t - 18 = 0.$

Можно угадать один корень: $t=1$ и разделить многочлен

$8t^3 - t^2 + 11t - 18$ на одночлен $(t - 1)$.

Получим квадратное уравнение: $8t^2 + 7t + 18 = 0$.

$D = 49 - 32*18 < 0$ – других решений нет

Таким образом, $t = 1$, следовательно, $\frac{y}{x} = 1$, т.е. $y = x$.

Ответ: $y = x$.

Иногда полезно самим ввести однородность в уравнение.

Рассмотрим уравнение:

10. $4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(1 + x)$.

Пусть $t = \sqrt{x+1}$, с помощью данной замены получим однородное уравнение: $4x^2 + 12xt - 27t^2 = 0$.

Так как $x = -1$ не является корнем уравнения (при этом значении переменная t обращается в нуль), разделим обе части уравнения на t^2:

$4\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 12\frac{x}{t} - 27 = 0.$

Пусть $\frac{x}{t} = n$, получим уравнение $4n^2 + 12n - 27 = 0$.

$\frac{D}{4} = 36 + 108 = 144.$

$n_1 = \frac{-6+12}{4} = \frac{3}{2}$, $n_2 = \frac{-6-12}{4} = \frac{9}{2}$.

Вернемся к замене: $\frac{x}{t} = \frac{3}{2}$ или $\frac{x}{t} = -\frac{9}{2}$. Отсюда с учетом замены

$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{3}{2}$ (1) или

$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = -\frac{9}{2}$ (2).

Рассмотрим уравнение (1): $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{3}{2}$.

Корни данного уравнения:

$x_1 = 3$ – удовлетворяет условию $x \geq 0$,

$x_2 = -\frac{3}{4}$ – не удовлетворяет.

Аналогично решается уравнение (2): $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = -\frac{9}{2}$.

Корни уравнения:

$x_1 = \frac{81-9\sqrt{97}}{8}$ – удовлетворяет условию $x < 0$,

$x_2 = \frac{81+9\sqrt{97}}{8}$ – не удовлетворяет условию.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{81-9\sqrt{97}}{8}$.

Рассмотрим функционально-аналитический метод. Часто, анализируя уравнение, можно угадать его корень или корни. Но этого не достаточно для решения уравнения, важным моментом является и доказательство, что других корней нет.

В этом может помочь теорема о корне или ее следствие.

Теорема о корне.

Пусть функция y=f(x) возрастает (или убывает) на множестве X из D(f), число а – любое из значений, принимаемых f(x) на множестве X, тогда уравнение f(x)=a имеет единственный корень на множестве X.

Следствие из теоремы о корне.

Если функция y=f(x) возрастает, а функция y=g(x) убывает и если уравнение f(x)=g(x) имеет корень, то только один.

Алгоритм решения уравнений функционально-аналитическим методом:

- угадать корень;
- доказать, что других корней нет.

Рассмотрим следующие уравнения:

11. $\sqrt{2x-1} + 2^x = \sqrt{10-x}$.
12. $2^x + 3^x + 4^x = (3 + x)5^x$.

Решим первое из предложенных уравнений. Можно угадать корень: x = 1. Левая часть уравнения содержит возрастающую функцию (как сумма двух возрастающих функций). Справа находится убывающая функция, поэтому данное уравнение по следствию из теоремы о корне имеет не более одного решения.

Ответ: x = 1.

Решим второе уравнение. Можно угадать корень: x = 0. Докажем, что других корней нет. Рассматривая уравнение в данном виде, ничего нельзя сказать о монотонности функций, входящих в левую и правую части уравнения. Преобразуем уравнение, для этого разделим обе части уравнения на 5^x. Получим:

$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 3 + x.$

Слева убывающая функция, справа – возрастающая.

Тогда по теореме о корне других корней, кроме x = 0, нет.

Ответ: x = 0.

Рассмотрим нестандартные замены. Решим следующее уравнение:

13. $(6x + 7)^2(3x + 4)(x + 1) = 6.$

Преобразуем уравнение, стараясь выделить общие части в множителях:

$(6x + 7)^2 * \frac{1}{2}(6x + 8) * \frac{1}{6}(6x + 6) = 6,$

$(6x + 7)^2(6x + 8)(6x + 6) = 72.$

Введем замену, пусть 6x + 7 = y, тогда $y^2(y + 1)(y - 1) = 72$, тогда $y^4 - y^2 - 72 = 0$.

По теореме Виета найдем корни уравнения:

$y^2 = -8$ – решений нет,

$y^2 = 9$, т.е. $y = \pm 3$.

Вернемся к замене:

6x + 7 = 3 или 6x + 7 = – 3. Найдем корни уравнения:

$x = -\frac{2}{3}$ или $x = -\frac{5}{2}$

Ответ: $x = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{5}{2}$.

Выводы. Резюмируя все вышесказанное, можно сделать вывод. Решая нестандартные уравнения, не следует торопиться, и прежде чем приступить к его решению, полезно сделать подробный анализ самого уравнения: проанализировать вид уравнения, попытаться отнести его к известному типу уравнений; выделить функции, входящие в уравнение; проанализировать область определения (ОДЗ); оценить область значений левой и правой частей уравнения. И только после этого приступать к решению самого уравнения. Ведь довольно часто уже этих мер бывает достаточно, чтобы решить довольно сложные на первый взгляд уравнения.

Список литературы

1. Слонимский Л.И., Слонимская И.С. ЕГЭ. Математика. Сборник экзаменационных заданий с решениями и ответами для подготовки к единому государственному экзамену. Базовый уровень. М.: АСТ, 2020. 272 с.
2. Будак Б.А., Золотарева Н.Д. Математика. Сборник задач по углубленному курсу М.: Лаборатория знаний, 2018. 324 с.
3. Ященко И.В. ЕГЭ: 400 задач с ответами по математике. Все задания (Закрытый сегмент). Базовый и профильный уровни / Под. ред И.В. Ященко. М.: Экзамен, 2016. 640 с.
4. Воистинова Г.Х. Анализ в задачах на построение // Современные проблемы образования и науки: электронный научный журнал. 2014. № 2. [Электронный ресурс]. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=12536 (дата обращения: 06.12.2021).
5. Воистинова Г.Х. Приемы решения нестандартных уравнений // Современные проблемы математики и физики: материалы Международной научной конференции (г. Стерлитамак, 12-15 сентября 2021 г.). Т. II. / Отв. ред. А.И. Филиппов. Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. С. 213-216.
6. Саранцев Г.И. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование». Казань: Центр инновационных технологий, 2011. 228 с.
7. Кармакова Т.С., Володькин Е.Г. Способы решения нестандартных уравнений и систем уравнений: Дидактические материалы для учителей математики. Хабаровск: ХК ППК ПК, 2005. 60 с.
8. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Алгебра: Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы. М.: Дрофа, 2002. 192 с.
9. Садыкова Л.К. Подготовка студентов математических специальностей педвузов к обучению учащихся образовательных учреждений функционально-графическому методу решения уравнений и неравенств: автореф. дис. … канд. пед. наук. Саранск, 2010. 15 с.
10. Капкаева Л.С. Алгебраический и геометрический методы в школьном курсе математики как способы познавательной деятельности учащихся // Гуманитарные науки и образование. 2012. № 1. С. 18-22.