

## ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТЕ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ЗАДАНИЙ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА

Алмазова Т.А.<sup>1</sup>, Зенкина И.А.<sup>2</sup>, Никаноркина Н.В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Калужский государственный университет имени К.Э. Циолковского», Калуга, e-mail: rector@kspu.kaluga.ru;

<sup>2</sup>Калужский филиал ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», Калуга, e-mail: bauman.kf@bmstu.ru;

<sup>3</sup>Калужский филиал ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», Калуга, e-mail: fa-kaluga@fa.ru

В настоящее время в связи с развитием цифровой экономики от всех членов современного общества требуется умение получать, обрабатывать, анализировать информацию и делать на основе этого практические выводы. В школьном образовании особое внимание уделяется совершенствованию качества математической подготовки. В рамках этого проводится расширение содержания и задачной базы вероятностно-статистической линии школьного курса математики. Контроль полученных учениками знаний, умений и навыков осуществляется в форме Единого государственного экзамена, структура которого претерпевает изменения. В статье проведен анализ изменений в заданиях ЕГЭ по математике профильного уровня, рассмотрены типичные ошибки, которые допускали участники экзамена при решении вероятностных задач, проведен анализ заданий из открытого банка ФИПИ, выделены типы задач, указаны методы их решения и необходимый для этого теоретический материал. Также в статье представлен анализ содержания учебников по алгебре и началам анализа, включенных в федеральный перечень на 2021–2022 учебный год в контексте рассматриваемой проблемы. На основе проведенных исследований даны рекомендации учителям по преподаванию вероятностно-статистической линии в рамках школьного курса математики.

Ключевые слова: Единый государственный экзамен, вероятностно-статистическая линия, обучение математике, профильный уровень.

## PROBABILISTIC-STATISTICAL LINE IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS IN THE CONTEXT OF SABOTAGE OF TASKS OF THE UNIFIED STATE EXAM

Almazova T.A.<sup>1</sup>, Zenkina I.A.<sup>2</sup>, Nikanorkina N.V.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky, Kaluga, e-mail: rector@kspu.kaluga.ru;

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch), Kaluga, e-mail: bauman.kf@bmstu.ru;

<sup>3</sup>Kaluga Branch of Financial University under the Government of the Russian Federation, Kaluga, e-mail: fa-kaluga@fa.ru

Nowadays due to the development of the digital economy, all members of modern society are required to be able to receive, process, analyze information and draw practical conclusions based on this. In school education special attention is paid to improving the quality of mathematical training. Within the framework of this, the content and task base of the probabilistic and statistical line in school mathematics is being expanded. Control of knowledge, skills and abilities of students is carried out in the form of a unified state exam. Exam structure is undergoing changes. The article analyzes the changes in the tasks of the Unified State Exam in mathematics of the profile level, discusses the typical mistakes that participants in the USE make when solving probabilistic problems. Tasks from the open bank of FIPI are systematized according to the level of complexity and subject, types of tasks are distinguished, methods for solving them and the necessary theoretical material are described. The authors present an analysis of mathematics textbooks from the federal list for the 2021-2022 academic year in the context of the problem under consideration. Based on the conducted research, recommendations are given to teachers on teaching the probabilistic-statistical line in school mathematics.

Keywords: unified state exam, probabilistic and statistical line, teaching Mathematics, profile level.

В современном мире с каждым годом повышается уровень информатизации и цифровизации всех отраслей жизни и деятельности человека. Школьное образование должно соответствовать требованиям современной реальности, поэтому в рамках модернизации

содержания и структуры российского школьного образования одной из важнейших задач является совершенствование качества математического образования. Особое внимание при этом направлено на практическое применение полученных знаний, на умение строить математические модели реальных процессов, изучать их и в дальнейшем интерпретировать полученные результаты. Формирование у школьников навыков математического моделирования, практического применения полученных математических знаний должно осуществляться при изучении всех содержательно-методических линий школьного курса математики. Однако учебный потенциал этих линий, позволяющий реализовать обозначенную выше задачу, существенно различается. Это требует от учителя дополнительных усилий по поиску и отбору соответствующего содержания. Вероятностно-статистическая линия является одной из методических линий школьного курса математики, содержание которой позволяет иллюстрировать практическое применение математики в различных областях знаний и повседневной жизни и одновременно формировать соответствующие умения и навыки.

Попытки ввести в школьный курс математики вероятностно-статистическую линию предпринимались несколько раз: в 1960-е и 1980-е гг., однако полного развития идеи вероятности в школе не получили. В настоящее время развитие технологий требует от членов общества знаний в области теории вероятностей и умений применять их на практике, поэтому в школьный курс математики вводится вероятностно-статистическая линия. Задания по теории вероятностей и элементам статистики и ранее были представлены в Едином государственном экзамене по математике, но с 2022 г. их количество и сложность возрастают. Однако не во всех комплектах учебников, включенных в федеральный перечень на 2021–2022 учебный год, вероятностно-статистическая линия представлена в необходимом объеме. В связи со сказанным необходимы анализ заданий Единого государственного экзамена, представленных в блоке «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей», типизация задач этого блока, определение знаний и умений, которыми должен владеть выпускник школы для выполнения этих заданий. Вместе с тем требуется анализ содержания учебников алгебры и начал анализа на предмет согласованности их содержания с требованиями, предъявляемыми к освоению материала по теории вероятностей и математической статистике в контексте диверсификации. Кроме этого, нужно сформулировать рекомендации учителю по преподаванию теории вероятностей и статистики в старшей школе.

Цель исследования – проанализировать и установить соответствие содержания вероятностно-статистической линии, представленной в комплектах учебников, включенных в федеральный перечень на 2021–2022 учебный год, проверяемым требованиям к результатам

освоения основной образовательной программы общего образования по математике на профильном уровне.

Задачи исследования:

1. Изучить изменения в ЕГЭ по математике в рамках вероятностно-статистической линии.
2. Систематизировать задания из открытого банка данных ФИПИ по содержанию и методам решения.
3. Провести анализ учебников по математике из федерального перечня на 2021–2022 учебный год.
4. Сформулировать рекомендации для учителей по преподаванию теории вероятностей и математической статистики в школе.

### **Материал и методы исследования**

Материалом для исследования послужили задания открытого банка ФИПИ Единого государственного экзамена по математике, статистические данные результатов выполнения школьниками отдельных заданий ЕГЭ, содержание учебников алгебры и начал анализа.

### **Результаты исследования и их обсуждение**

В Едином государственном экзамене по математике отдельно выделен блок «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей». В рамках контроля освоения раздела «Элементы комбинаторики» проверяется владение двумя компонентами государственного образовательного стандарта среднего общего образования. Компонент «Поочередный и одновременный выбор» на базовом и профильном уровнях освоения дисциплины предполагает умение решать задачи с применением комбинаторики. Второй компонент «Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона» проверяет знание биномиального распределения и его свойств [1].

Раздел «Элементы статистики» представлен двумя федеральными компонентами. В рамках первого «Табличное и графическое представление данных» на базовом уровне проверяется умение решать задачи на табличное и графическое представление данных, а на профильном – использовать таблицы и диаграммы для представления данных. Второй компонент «Числовые характеристики рядов данных» на базовом уровне освоения дисциплины направлен на проверку использования свойств и характеристик числовых наборов: средних, наибольшего и наименьшего значения, размаха, дисперсии – при решении задач, на профильном уровне к заявленным характеристикам добавляется среднее квадратическое отклонение.

Третий раздел блока «Элементы теории вероятностей», так же как и первые два, содержит два компонента государственного образовательного стандарта. Первый из них, называемый «Вероятности событий», на базовом уровне проверяет вычисление вероятностей

в опытах с равновозможными элементарными исходами, на профильном уровне требуется умение вычислять частоты и вероятности событий не только для равновозможных исходов. Компонент «Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач» проверяет освоение таких элементов содержания курса, как вычисление вероятностей независимых событий, использование формулы сложения вероятностей, диаграмм Эйлера, дерева вероятностей, формулы Бернулли.

Задания на элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в первую часть экзаменационной работы по математике профильного уровня. Это означает, что владение соответствующими компонентами относится к общематематическим умениям, необходимым человеку в современном обществе.

До 2022 г. в Едином государственном экзамене по математике профильного уровня линия «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» была представлена одним заданием, которое в контрольно-измерительных материалах (КИМ) имело № 4. Как правило, решение этой задачи предполагало подсчет вероятности равновозможных событий, использование кругов Эйлера, построение дерева событий, применение теорем сложения для совместных и несовместных событий, теорем умножения для независимых событий. Это задание относилось к базовому уровню сложности и довольно успешно выполнялось участниками экзамена в разных группах. Средний процент выполнения этого задания в Калужской области в 2021 г. составил 95%. В группе участников экзамена, не преодолевших минимальный порог, задачу на теорию вероятностей, тем не менее, решили более половины – 61%. В группе учеников, набравших от минимального балла до 60 баллов, с заданием успешно справились 93%, а среди участников экзамена, набравших более 80 балла, задачу верно решили 99% учеников [2]. Эти данные позволяют говорить об успешном освоении школьниками основ комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики. Впервые задание по теории вероятностей на ЕГЭ по математике появилось в 2014 г., и с тех пор процент его выполнения существенно вырос.

Повышение уровня информатизации жизни требует от выпускников школ более серьезного владения вероятностно-статистическими понятиями и методами и умения применять полученные знания для анализа жизненных ситуаций и решения практических задач. Поэтому в контрольно-измерительные материалы было добавлено еще одно задание под № 10, проверяющее умение моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий. Это задание имеет повышенный уровень сложности. Для его выполнения выпускник должен уверенно владеть формулами комбинаторики, классическим и статистическим определениями

вероятности, знать теоремы сложения и умножения, формулы полной вероятности и Байеса, формулу Бернулли, уметь находить отдельные числовые характеристики рядов данных.

Задание базового уровня сложности также осталось в КИМ, но его номер изменен на № 2. Задания № 2 и № 10 оцениваются по одному первичному баллу, и их вес составляет около 6,5% от максимального первичного балла. Предполагается выполнение выпускником, изучавшим математику на базовом уровне, задания № 2, проверяющего умение строить и исследовать простейшие математические модели, за 5 минут, а на профильном уровне – за 2 минуты. Задание № 10, проверяющее умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, ученики должны в среднем выполнять за 18 и 8 минут соответственно.

В связи с изменениями в КИМ Единого государственного экзамена учителя математики и школьники, готовящиеся к экзамену, должны иметь представление о теоретическом материале, типах задач и методах их решения, которыми необходимо овладеть школьникам для успешного выполнения заданий № 2 и № 10. Для достижения этой цели проведем анализ заданий, предлагаемых в демонстрационном варианте [3] и в типовых вариантах экзаменационных заданий по математике [4], составленных с учетом особенностей и требований ЕГЭ по математике профильного уровня 2022 г., с последующей их систематизацией. Отметим, что типовые варианты составлены разработчиками контрольно-измерительных материалов ЕГЭ по математике.

Как было указано выше, задание № 2 относится к базовому уровню сложности. Нами были выделены следующие 5 типов (или групп) этого задания.

Первая группа: задания на применение формулы классической вероятности, в которых число всех равновозможных исходов опыта и число благоприятных исходов определяются непосредственно из условия задачи. К заданиям этой группы можно отнести пример 1 задания № 2 демонстрационного варианта [3] и задания в вариантах 6–8, 15, 31–33 из [4].

Вторая группа: задания на применение формулы классической вероятности, в которых число всех равновозможных исходов опыта и число благоприятных исходов определяются либо перебором вариантов, либо по формулам комбинаторики. В эту группу можно включить задачи вариантов 3–5, 12–14, 21–22, 25–30, 34, 36–40, 43–45 из [4].

Третья группа: задания на применение теорем сложения и умножения вероятностей.

В этих задачах встречаются случаи, где необходимо вычислить вероятность суммы несовместных либо совместных событий и/или вероятность произведения независимых событий. К числу заданий этого типа относятся пример 2 задания № 2 демонстрационного варианта [3] и задачи вариантов 1–2, 23–24, 35, 46–50 из [4].

Четвертая группа: задания на применение формулы полной вероятности. Отметим, что задачи этого типа можно было бы отнести к третьей группе, поскольку школьник может решить их без использования формулы полной вероятности на основе теорем сложения и умножения вероятностей. Однако знание формулы полной вероятности облегчает решение, поэтому выделим для таких задач отдельную группу. В эту группу входят задачи вариантов 9–11, 16–20 и 41 из [4].

Пятая группа: задания на вычисление относительной частоты события. Пример задачи этой группы представлен в варианте 42 из [4].

Анализ содержания задания № 10, имеющего повышенный уровень сложности, примеры которого приведены в [3] и [4], позволил нам выделить следующие типы (группы).

Первая группа: задания на применение формулы классической вероятности, в которых число всех равновозможных исходов опыта и число благоприятных исходов определяются либо перебором вариантов, либо по формулам комбинаторики. Отличие задач этой группы от описанной нами выше второй группы задания № 2 состоит в том, что в этих задачах необходимо сначала правильно понять требование задачи и перевести его на язык теории вероятностей. А это требует от школьника дополнительных усилий. К числу задач этой группы относятся задания вариантов 16–21, 35–39 из [4].

Вторая группа: задания на применение теорем сложения и умножения вероятностей.

В отличие от задач третьего типа задания № 2, где тоже применяются теоремы сложения и умножения вероятностей, в задачах этой группы либо сложнее формулировка требования и необходимо умение моделировать реальную ситуацию на языке теории вероятностей, прежде чем использовать теоремы сложения и умножения вероятностей, либо речь идет о вычислении вероятности произведения двух/трех зависимых событий, что тоже повышает уровень сложности задачи. В эту группу можно включить пример 1 задания № 10 демонстрационной версии [3] и задачи вариантов 9–11, 12–15, 22–25, 28–34, 40–44 и 49–50 из [4].

Третья группа: задания на применение формулы полной вероятности и/или формулы Байеса. В задачах четвертого типа задания № 2 тоже требуется применение формулы полной вероятности, но в данном случае усложнение связано с формулировкой задачи, требующей умения перевести ее на язык теории вероятностей, правильно ввести в рассмотрение события и понять, какую вероятность искать, а также с тем, что для решения некоторых задач необходимо применение не только формулы полной вероятности, но и формулы Байеса. К этому типу можно отнести пример 2 задания № 10 демонстрационного варианта [3] и задачи вариантов 6–8 и 26–27 из [4].

Четвертая группа: задания на применение формулы Бернулли. Задачи этого типа могут быть двух разновидностей: на вычисление вероятности указанного события с помощью формулы Бернулли либо на определение числа испытаний Бернулли. Следует отметить, что, помимо применения формулы Бернулли, в таких задачах требуется выполнение еще каких-либо действий (например, нахождения отношения вероятностей, решения неравенств и т.д.). Примерами задач первой разновидности могут служить задания вариантов 1–5 из [4], а второй разновидности – задания вариантов 45–48 из [4].

На основании описанных особенностей ЕГЭ по математике профильного уровня, связанных с усилением линии «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей», целесообразно провести анализ учебно-методических комплектов по математике на предмет соответствия их содержания требованиям по подготовке к сдаче государственной итоговой аттестации и наличия в них заданий, соответствующих выделенным выше типам.

Традиционно изложение вероятностно-статистической линии строится на основе концентрических окружностей, т.е. обращение к соответствующему учебному материалу осуществляется на протяжении всего курса изучения математики в школе, при этом каждое обращение сопровождается его расширением и углублением. В связи с такой особенностью построения вероятностно-статистической линии достаточно провести анализ учебного материала, представленного в учебниках алгебры и начал анализа, что вместе с обозначенной выше особенностью может быть обусловлено не всегда реализуемой преемственностью в выборе учебно-методических комплектов для основной и старшей школы. Реализация поставленной задачи позволит оценить полноту предлагаемого учебного материала (теоретической составляющей и задачной базы), его соответствия требованиям федерального государственного образовательного стандарта и согласованности с заданиями ЕГЭ.

Проведем анализ содержания следующих комплектов учебников, включенных в федеральный перечень на 2021–2022 учебный год.

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10 класс: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / С.М. Никольский, Н.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 9-е изд. – М: Просвещение, 2021.
2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 11 класс: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / С.М. Никольский, Н.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 9-е изд. – М: Просвещение, 2021.

3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10 класс: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Ю.М.Колягин, М.В.Ткачева, Н.Е. Федорова и др. – М: Просвещение, 2021.
4. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 11 класс: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Ю.М.Колягин, М.В.Ткачева, Н.Е. Федорова и др. – М: Просвещение, 2021.
5. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа 10 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) В 2 ч. / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов – 10-е изд. – М.: Мнемозина, 2021.
6. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) В 2 ч. / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов – 10-е изд. – М.: Мнемозина, 2021.

Авторским коллективом, в который входят С.М. Никольский и иные, вероятностно-статистическая линия представлена только в учебнике для 10-го класса. Это заключительная глава учебника, состоящая из трех параграфов: 1. Вероятность события. 2. Частота. Условная вероятность. 3. Математическое ожидание.

В начале первого параграфа рассматриваются примеры, иллюстрирующие классическое определение вероятности случайного события, и вводится соответствующее определение, а также рассматриваются такие понятия, как «единственно возможное событие», «равновозможные события», «достоверное и невозможное события», «совместные и несовместные события». Задачи, предлагаемые для решения, направлены на формирование навыков по распознаванию видов событий и применению классического определения вероятностей (в некоторых из них требуется знание комбинаторного правила произведения или формулы для подсчета перестановок). Далее авторы рассматривают свойства вероятностей событий. Здесь вводятся операции над событиями: сумма и произведение событий; формулы для вычисления вероятности суммы совместных и несовместных событий. На основе этих формул объясняется смысл события  $A \setminus B$ , при этом название операции не вводится. На отработку операций и свойств авторы предлагают 10 задач.

В следующем параграфе вводится понятие относительной частоты события, описывается явление статистической устойчивости, дается аксиоматическое определение вероятности, предлагаются задачи на усвоение понятия «относительная частота». Далее в этом же параграфе предлагается пункт «Условная вероятность. Независимые события», в котором вводятся понятие условной вероятности, формулы для нахождения вероятности произведения



зависимых и независимых событий. Для отработки соответствующих навыков предлагается семь задач, одна из которых сформулирована в виде вопросов на проверку теоретических знаний, еще одна является качественной.

Заключительный параграф состоит из трех пунктов. В первом пункте вводится понятие случайной величины и ее математического ожидания, рассматриваются примеры на нахождение математического ожидания, предлагаются задачи для решения. В пункте «Сложный опыт» вводится и обобщается формула вероятности произведения независимых опытов. Для решения школьникам предлагаются только две задачи. Заключительным вопросом для изучения являются формула Бернулли и закон больших чисел. После введения формулы Бернулли авторы приводят примеры на применение этой формулы. Далее на примерах законов распределения случайной величины, представленных в табличной форме, формулируется закон больших чисел. Предлагаются четыре задачи для решения.

На основе проведенного анализа можно сделать вывод, что содержание вероятностно-статистической линии, представленное в проанализированном учебно-методическом комплекте, не позволяет учителю в полной мере осуществить работу, направленную на формирование у школьников теоретических знаний и навыков по решению задач, необходимых для успешной сдачи Единого государственного экзамена по математике на профильном уровне. В связи с этим содержание линии требует расширения и дополнения как теоретического материала, так и задачной базы. Целесообразно было бы актуализировать и расширить знания и сформировать умения школьников по комбинаторике, изучить формулу полной вероятности и формулу Байеса и показать их применение при решении задач.

В учебниках авторов Ю.М. Колягина и иных изучение материала вероятностно-статистической линии осуществляется в 11-м классе. Материал представлен в двух главах, одна из которых посвящена комбинаторике, а другая – теории вероятностей. Глава «Комбинаторика» начинается с параграфа, знакомящего школьников с методом математической индукции, затем несколько параграфов посвящены комбинаторике: актуализируются знания учеников о правиле произведения, рассматриваются задачи, приводящие к определенным комбинаторным соединениям (сочетаниям, размещениям, перестановкам), формулируются соответствующие определения. Каждое комбинаторное соединение представлено в отдельном параграфе, для формирования умений и навыков предлагается достаточное количество различных задач: вычислительного характера (на отработку навыков преобразования выражений, содержащих факториалы и комбинаторные компоненты), сюжетных (на подсчет количества комбинаций, подчиненным определенным условиям).

Следующая глава начинается с рассмотрения видов событий и их комбинации (операции). Формулируется определение различных комбинаций, подкрепляемое иллюстрацией на диаграммах Эйлера–Венна. Затем приводится классическое определение вероятности случайного события и рассматриваются виды событий (достоверное, невозможное), предлагаются упражнения на применение изученного теоретического материала. Важно отметить, что как в содержании параграфа, так и в предлагаемой системе упражнений представлены задания, для решения которых используются формулы комбинаторики. Следующий параграф посвящен теоремам вероятности суммы событий: даются две теоремы с доказательством для суммы несовместных событий и суммы двух произвольных событий, предлагаются упражнения на отработку навыков по применению этих теорем. Далее следует материал по условной вероятности, где формулируются определения условной вероятности и независимых событий. Все определения иллюстрируются примерами их применения. Затем следует параграф, в котором авторы дают материал, посвященный вероятности произведения независимых событий. Глава заканчивается параграфом под названием «Формула Бернулли». В качестве мотивации школьникам предлагаются две задачи, приводящие к постановке проблемы, далее выводится формула Бернулли.

Достоинством учебника является изложение материала по принципу «необходимо и достаточно»: в учебнике компактно и понятно, с использованием различных примеров дается теоретический материал. Для каждого параграфа представлена своя система задач.

В учебниках авторского коллектива А.Г. Мордковича и иных вероятностно-статистическая линия представлена в 10-м и 11-м классах. В 10-м классе заключительная глава учебника носит название «Комбинаторика и вероятность». В первом параграфе вводится и иллюстрируется примерами комбинаторное правило умножения для двух испытаний и для конечного числа испытаний, строится дерево вариантов, рассматривается теорема о количестве подмножеств у множества, состоящего из  $n$  элементов. Далее формулируются определение факториала, теорема о количестве способов нумерации  $n$  различных элементов. Затем формулируется и доказывается теорема о числе всех перестановок  $n$ -элементного множества, записывается соответствующая формула и приводятся примеры, иллюстрирующие ее применение. Во второй части учебника (практическая часть) предлагается большое количество разнообразных задач двух уровней сложности: комбинаторные задачи, задачи на отработку вычислительных навыков и умений работать с выражениями, содержащими факториалы, на доказательство тождеств и неравенств, решение уравнений, содержащих факториалы.

В следующем параграфе иллюстрируются различные способы подсчета количества комбинаций в случае выбора двух элементов из заданного множества. Методом

математической индукции доказывается формула количества двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из  $n$  элементов. Затем вводятся определение числа сочетаний и числа размещений из  $n$  элементов по 2. Далее рассматривается выбор нескольких элементов, доказывается теорема, в которой представлены формулы сочетаний и размещений из  $n$  элементов по  $k$  и связь между ними, а также формула бинома Ньютона. К этому параграфу во второй части учебника также дано большое количество задач комбинаторного характера: на вычисление, на решение уравнений, содержащих неизвестную в символической записи сочетаний и размещений, на доказательство тождеств и нахождение биномиальных коэффициентов.

Заключительный параграф этой главы посвящен случайным событиям и их вероятностям. Здесь авторы предлагают школьникам для изучения классическую вероятностную схему и классическое определение вероятности. Затем рассматриваются виды событий и теорема о подсчете количества элементов у множества, равного объединению двух других множеств, определение суммы и произведения событий и формулы для подсчета их вероятностей и следствия из них. Отдельное внимание уделено вероятности противоположного события, приводятся различные задачи, формулируется общее утверждение о подсчете вероятности в ходе независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами. К данному параграфу предлагается около 30 различных задач с подпунктами.

В учебнике для 11-го класса материал вероятностно-статистической линии представлен в главе «Элементы теории вероятностей и математической статистики». В начале главы повторяется классическая вероятностная схема и еще раз формулируется классическое определение вероятности события  $A$ , затем приводятся примеры подсчета геометрических вероятностей, формулируется общее правило нахождения геометрических вероятностей и рассматриваются геометрические модели вероятностных задач. Во второй части учебника (практическая часть) представлено большое количество разнообразных задач на нахождение геометрической вероятности.

Следующий параграф посвящен независимым повторениям испытаний с двумя исходами: схема и теорема Бернулли, биномиальное распределение, многоугольник распределения, наивероятнейшее число успехов. Далее рассматриваются статистические методы обработки информации: упорядочивание данных, их табличное и графическое представление, гистограммы, числовые характеристики данных. Последний параграф посвящен гауссовой кривой и закону больших чисел. Здесь представлены алгоритмы использования функций Гаусса и Лапласа для приближенных вычислений вероятностей событий, описывается явление статистической устойчивости, на конкретном примере

иллюстрируется справедливость закона больших чисел с последующей его формулировкой в простейшей форме. Весь теоретический материал сопровождается примерами, подробным их описанием и рассуждениями, приводящими к получению нужных закономерностей.

Подробное описание и построение изложения теоретического материала в формате учебника-собеседника с большим количеством примеров, сопровождающееся сильной задачей базой, поможет учителю методически грамотно организовать и диверсифицировать работу по изучению вероятностно-статистической линии в школьном курсе математики [5], проиллюстрировать ее практическую значимость и связь с другими разделами математики. Вместе с тем большая задачная база дает возможность полноценно осуществить подготовку школьников к успешному выполнению соответствующих заданий Единого государственного экзамена по математике и применению полученных знаний на практике.

### **Заключение**

Таким образом, для успешной подготовки школьников при изучении вероятностно-статистической линии учителю важно понимать и соотносить следующие компоненты: 1) содержание и нововведения ЕГЭ по математике; 2) типы задач, предлагаемых школьникам при написании ЕГЭ, и необходимый для их решения теоретический материал; 3) содержание используемых (или предполагаемых к использованию) учебно-методических комплектов по алгебре и началам анализа.

Проведенный анализ содержания учебного материала по заданиям № 2 и № 10 Единого государственного экзамена по математике профильного уровня и учебных комплектов поможет учителям математики методически грамотно и полно организовать подготовку школьников к освоению важного раздела математики, а также будет полезен студентам, обучающимся по направлениям подготовки, связанным с профессиональной деятельностью в сфере математического образования.

### **Список литературы**

1. Яценко И.В., Высоцкий И.Р., Семенов А.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года по математике// Педагогические измерения. 2021. № 4. С. 3-28.
2. Статистический сборник по ГИА-2021. [Электронный ресурс]. URL: [http://ege.kaluga.ru/index.php?option=com\\_phocadownload&view=category&id=16&Itemid=57](http://ege.kaluga.ru/index.php?option=com_phocadownload&view=category&id=16&Itemid=57) (дата обращения: 10.03.2022).
3. Сайт ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». [Электронный ресурс]. URL: <https://fipi.ru> (дата обращения: 10.03.2022).

4. Яценко И.В., Волчкевич М.А., Ворончагина О.А. и др. ЕГЭ 2022. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И.В. Яценко. М.: Издательство «Экзамен», 2022. 231 с.
5. Алмазова Т.А., Громова Н.Н. Методические аспекты подготовки будущих учителей математики на примере вероятностно-статистической линии // Современные проблемы науки и образования. 2020. № 6. [Электронный ресурс]. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=30375> (дата обращения: 10.03.2022).