

## РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПРОГРАММНОМ ПАКЕТЕ MATHCAD

Шакирова Д.У., Усова Л.Б.

*ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет», Оренбург, e-mail: schakirova09@mail.ru*

В современном мире необходимым источником для развития новых цифровых продуктов на рынке образовательных услуг является цифровизация образования. Цифровые технологии обучения в контексте цифровизации образования изменяют содержание преподаваемых дисциплин, способствуют развитию творческих способностей обучающихся, а также формированию цифровой грамотности и информационной культуры участников образовательного процесса. Важными составляющими информационно-образовательной среды являются программные системы компьютерной математики (математические пакеты), которые применяются при решении прикладных математических задач. Пакет MathCAD является открытым универсальным математическим пакетом, который дает возможность пользователю сосредоточиться не на способах программной реализации, а на решении самой задачи. В данной статье изложена краткая форма решения задач математической физики с помощью программного пакета MathCAD. Реализован один из важнейших принципов обучения студентов – наглядность, представленная в графической интерпретации решения задач о колебаниях. Рассмотрены алгоритмы визуализации задач, основанных на уравнениях гиперболического типа, с помощью программного пакета MathCAD. Представленные в статье способы реализации алгоритмов в пакете MathCAD способствуют формированию у студентов умений и навыков при работе с математическими моделями, описывающими физические явления, умения документировать все численные и символьные вычисления в процессе их проведения, а также формированию информационной культуры.

Ключевые слова: цифровизация образования, уравнения математической физики, математические пакеты, MathCAD, визуализация, алгоритмы.

## IMPLEMENTATION OF MATHEMATICAL PHYSICS ALGORITHMS IN THE MATHCAD SOFTWARE PACKAGE

Shakirova D.U., Usova L.B.

*FGBOU VO «Orenburg State University», Orenburg e-mail: schakirova09@mail.ru*

In the modern world, the digitalization of education is a necessary source for the development of new digital products in the educational services market. Digital learning technologies in the context of digitalization of education change the content of the disciplines taught, contribute to the development of students' creative abilities, as well as the formation of digital literacy and information culture of participants in the educational process. Important components of the information and educational environment are computer mathematics software systems (mathematical packages), which are used in solving applied mathematical problems. The MathCAD package is an open universal mathematical package that allows the user to focus not on the methods of software implementation, but on solving the problem itself. This article presents a brief form of solving mathematical physics problems using the MathCAD software package. One of the most important principles of teaching students is implemented as visibility, presented in a graphical interpretation of solving problems about fluctuations. Algorithms for visualizing problems based on hyperbolic equations using the MathCAD software package are considered. The implementations of algorithms presented in the article in the MathCAD package contribute to the formation of students' skills when working with mathematical models describing physical phenomena; the ability to document all numerical and symbolic calculations in the process of their implementation, as well as the formation of an information culture.

Keywords: digitalization of education, mathematical physics equations, mathematical packages, MathCAD, visualization, algorithms.

В настоящее время распространение цифровых технологий в России ведет к качественным изменениям не только в сфере производства, но и в образовании. Цифровая трансформация затрагивает все уровни образования и включает в себя не только развитие цифровой инфраструктуры образования, но и развитие цифровых учебно-методических

материалов, инструментов, сервисов, а также разработку и распространение новых моделей организации учебной работы. Основной задачей цифровизации образования в настоящий момент является не только получение студентами определенного объема знаний, но и формирование у них навыков и умений с помощью инструментов цифрового обучения самостоятельно приобретать знания.

Применение студентами новых информационных технологий способствует формированию у них способности к самостоятельному мышлению, творческой работе по выполнению различных практико-ориентированных заданий, а также формированию навыков самообразования, умений быстро ориентироваться в огромном потоке информации, умений анализировать, систематизировать, обобщать и делать выводы. В связи с этим роль преподавателя в раскрытии возможностей новых компьютерных технологий очень важна, но при этом нужно учитывать личные потребности и интересы студентов, использовать необходимое программное обеспечение и выстраивать индивидуальную образовательную траекторию.

Для изучения физических явлений и процессов применяют компьютерное моделирование, которое позволяет оперативно оценить решения упрощенных математических моделей и представить закономерности изучаемых явлений и процессов. Благодаря использованию специализированных программ повышаются темпы и качество проектирования, эффективно решаются сложные инженерные задачи. В настоящее время в решении научно-инженерных задач находят широкое применение системы компьютерной математики (или математические пакеты). Самыми популярными из них являются Matlab, MathCAD, Maple. Математические пакеты представляют собой интегрированные программные системы автоматизации математических расчетов.

По мнению Л.М. Будовской, к математическим пакетам относятся программы, которые обладают инструментами выполнения различного типа численных и аналитических расчетов (арифметических вычислений, решения уравнений с частными производными, решения задач оптимизации, проверки статистических гипотез средствами конструирования математических моделей) [1, 2].

Создавая, разрабатывая математические модели и работая с ними, студенты намного глубже начинают исследовать математическую модель, понимать способы обработки информации и различные методы программирования.

В математические пакеты MathCAD, Maple, Mathematica включены не только программы символьной математики, но и программы для решения математических задач с использованием численных методов.

Математический пакет MathCAD представляет собой мощную систему компьютерной математики, сочетающую в себе удобный редактор документов и формул, электронные книги, системный интегратор, ресурсный центр, справочную систему, интернет-браузер. Данный пакет достаточно прост в изучении и содержит мощный математический инструмент, который позволяет выполнять символьные вычисления, решать различные системы уравнений (алгебраических и дифференциальных), строить графики и писать программы.

В настоящее время представлен целый ряд математических пакетов для решения задач математической физики. При выборе наиболее подходящего математического пакета, используемого для моделирования физического процесса, должны учитываться применимость используемого языка к математической записи решаемых уравнений и возможность работы на неструктурированных сетках в сложных областях [3].

Одним из лучших в России для математических и научно-технических расчетов признан пакет MathCAD. Простота и удобство интерфейса пакета MathCAD позволяют пользователю, не владеющему навыками сложных математических преобразований, самостоятельно выполнять трудоемкие вычисления и решать содержательные задачи. Применение библиотек программ, созданных на основе языков программирования общего назначения, и пакетов расширений обеспечивает профессиональную ориентацию на любую область науки и образования [4]. Достоинство применения математического пакета MathCAD состоит в качестве вычислительной системы. Также эта программа открывает большие возможности для учебного процесса: происходит оптимизация самостоятельной работы студентов, сокращается время решения математической задачи, а также выполняется автоматизация громоздких вычислительных задач при курсовом и дипломном проектировании, при выполнении расчетно-графических, домашних и контрольных заданий.

Цель исследования – показать эффективность реализации алгоритма математической физики с помощью программного пакета MathCAD как средства модернизации преподаваемых математических дисциплин.

**Материалы и методы исследования.** Включение в учебный образовательный процесс современных компьютерных математических пакетов позволяет изменить в лучшую сторону методику изучения некоторых дисциплин, таких как «Уравнения математической физики», «Уравнения с частными производными», «Дифференциальные и разностные уравнения», связанных с выполнением сложных и громоздких аналитических вычислений.

В курсе изучения математических дисциплин нами использовался пакет MathCAD как один из самых универсальных математических пакетов. Визуально-ориентированный язык программирования и интерпретируемость пакета MathCAD способствуют его успешному

применению в нашем вузе не только на математических дисциплинах, но и при выполнении курсовых работ и проектов на старших курсах. Пакет MathCAD включает в себя мощный математический аппарат, содержит различные базовые математические функции (матричное исчисление, статистические алгоритмы, решение уравнений, поиск экстремумов функциональных зависимостей и др.). В пакете используются буквы как латинского, так и греческого алфавита. Имеется меню для различных математических символов, причем каждая страница документа содержит текст, математические выражения, двумерные и трехмерные графики, связанные с выражениями рисунки, созданные в Windows-приложениях, которые позволяют получить объемный отчет о проделанной работе в среде пакета MathCAD [5]. Также можно отметить, что достоинствами данного пакета являются «живая» архитектура вычислений и возможность визуализации.

В данной статье рассмотрены решения только некоторых классических задач математической физики с помощью пакета MathCAD, решение уравнений которых связано с громоздкими математическими преобразованиями. Вместо того чтобы выполнять их вручную, студенты учатся проводить их с помощью пакета MathCAD.

Как известно, уравнениями математической физики называются уравнения, которые описывают математические модели физических явлений, а также процессы, изучаемые в теории упругости, гидродинамике, электродинамике, квантовой физике и т.д. Большое количество физических процессов и явлений описываются дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных, и методы решения этих уравнений зависят от типа, к которому принадлежит данное решаемое уравнение.

В статье рассмотрены решения некоторых задач математической физики для гиперболического типа дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с помощью пакета MathCAD, а также краевые задачи для линейных уравнений с частными производными второго порядка.

Рассмотрим пример использования пакета MathCAD при решении задач на приведение уравнений с частными производными 2-го порядка к каноническому виду.

**Задача 1.** Привести к каноническому виду уравнение:

$$4u_{xx} + 8u_{xy} + 3u_{yy} + u_y + 2u_x = 0 \quad (1)$$

Находя дискриминант характеристического уравнения, мы определяем, что заданное уравнение является уравнением гиперболического типа на всей области  $R^2$ . И соответствующее уравнение характеристик имеет вид:  $4dy^2 - 8dxdy + 3dx^2 = 0$ . Задав новые переменные в пакете MathCAD  $\xi(x, y) = y - \frac{3x}{2}$ ,  $\eta(x, y) = y - \frac{x}{2}$  и найдя частные производные 1-го и 2-го порядков, мы получим результаты реализации алгоритма приведения к

каноническому виду уравнения гиперболического типа. Отрывок решения данной задачи представлен на рисунке 1.

$$\xi(x,y) := y - \frac{3x}{2} \quad \xi_x(x,y) := \frac{d}{dx}\xi(x,y) \rightarrow -\frac{3}{2} \quad \xi_y(x,y) := \frac{d}{dy}\xi(x,y) \rightarrow 1$$

$$\eta(x,y) := y - \frac{1x}{2} \quad \eta_x(x,y) := \frac{d}{dx}\eta(x,y) \rightarrow -\frac{1}{2} \quad \eta_y(x,y) := \frac{d}{dy}\eta(x,y) \rightarrow 1$$

$$U_{yy}(x,y, U_\xi, U_\eta, U_{\xi\xi}, U_{\xi\eta}, U_{\eta\eta}) := (U_{\xi\xi}(x,y) \cdot \xi_y(x,y) + U_{\xi\eta}(x,y) \cdot \eta_y(x,y)) \cdot \xi_y(x,y) + U_{\eta\eta}(x,y) \cdot \left(\frac{d}{dy}\xi_y(x,y)\right) +$$

$$+ (U_{\xi\eta}(x,y) \cdot \xi_y(x,y) + U_{\eta\eta}(x,y) \cdot \eta_y(x,y)) \cdot \eta_y(x,y) + U_{\eta\eta}(x,y) \cdot \left(\frac{d}{dy}\eta_y(x,y)\right) \rightarrow U_{\eta\eta}(x,y) + 2 \cdot U_{\xi\eta}(x,y) + U_{\xi\xi}(x,y)$$

$$4U_{xx}(x,y, U_\xi, U_\eta, U_{\xi\xi}, U_{\xi\eta}, U_{\eta\eta}) + 8U_{xy}(x,y, U_\xi, U_\eta, U_{\xi\xi}, U_{\xi\eta}, U_{\eta\eta}) + 3U_{yy}(x,y, U_\xi, U_\eta, U_{\xi\xi}, U_{\xi\eta}, U_{\eta\eta}) +$$

$$+ U_{yy}(x,y, U_\xi, U_\eta) + 2U_{xx}(x,y, U_\xi, U_\eta) \rightarrow -2 \cdot U_{\xi\xi}(x,y) - 4 \cdot U_{\xi\eta}(x,y)$$

Рис. 1. Листинг решения задачи 1 в пакете MathCAD

Таким образом, преимуществами работы данного пакета с заданиями на приведение уравнения к каноническому виду являются наглядность результатов, отсутствие необходимости создания универсальных программных файлов для решения задач, избавление студентов от массы громоздких вычислительных действий. Нужно отметить, что изменение любых данных (переменных) в формулах или уравнениях в пакете MathCAD влечет оперативное пересчитывание математических выражений и построение графиков.

Для решения задач математической физики рассматривают различные методы, одним из которых является метод Даламбера. Рассмотрим пример решения задачи Коши методом Даламбера с помощью пакета MathCAD.

**Задача 2.** Бесконечная струна, имеющая волновой параметр  $a^2 = 4$ , в начальный момент времени отклонена, как на рисунке 2. Значения  $U_0 = 1$  и  $c = 1$ . Найти профиль струны для моментов времени  $\frac{c}{a}, \frac{2c}{a}, \frac{3c}{a}, \frac{4c}{a}$  [4].

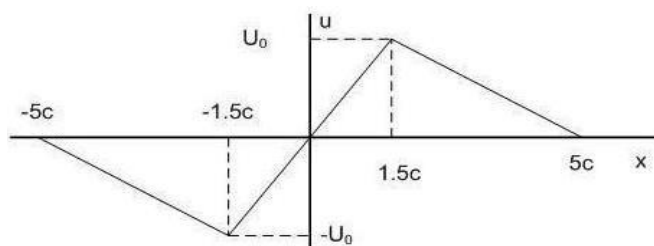


Рис. 2. Отклонение струны в начальный момент времени

Как известно, формула Даламбера имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-\sqrt{at}) + \varphi(x+\sqrt{at})}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-\sqrt{at}}^{x+\sqrt{at}} \psi(z) dz \quad (2)$$

Найдём решение уравнения (2) в пакете MathCAD в символьном виде. Пример решения уравнения в MathCAD, где определены переменная  $t_0$ , функция  $u(x,t)$  и построены профили струны для различных моментов времени, представлен на рисунке 3.

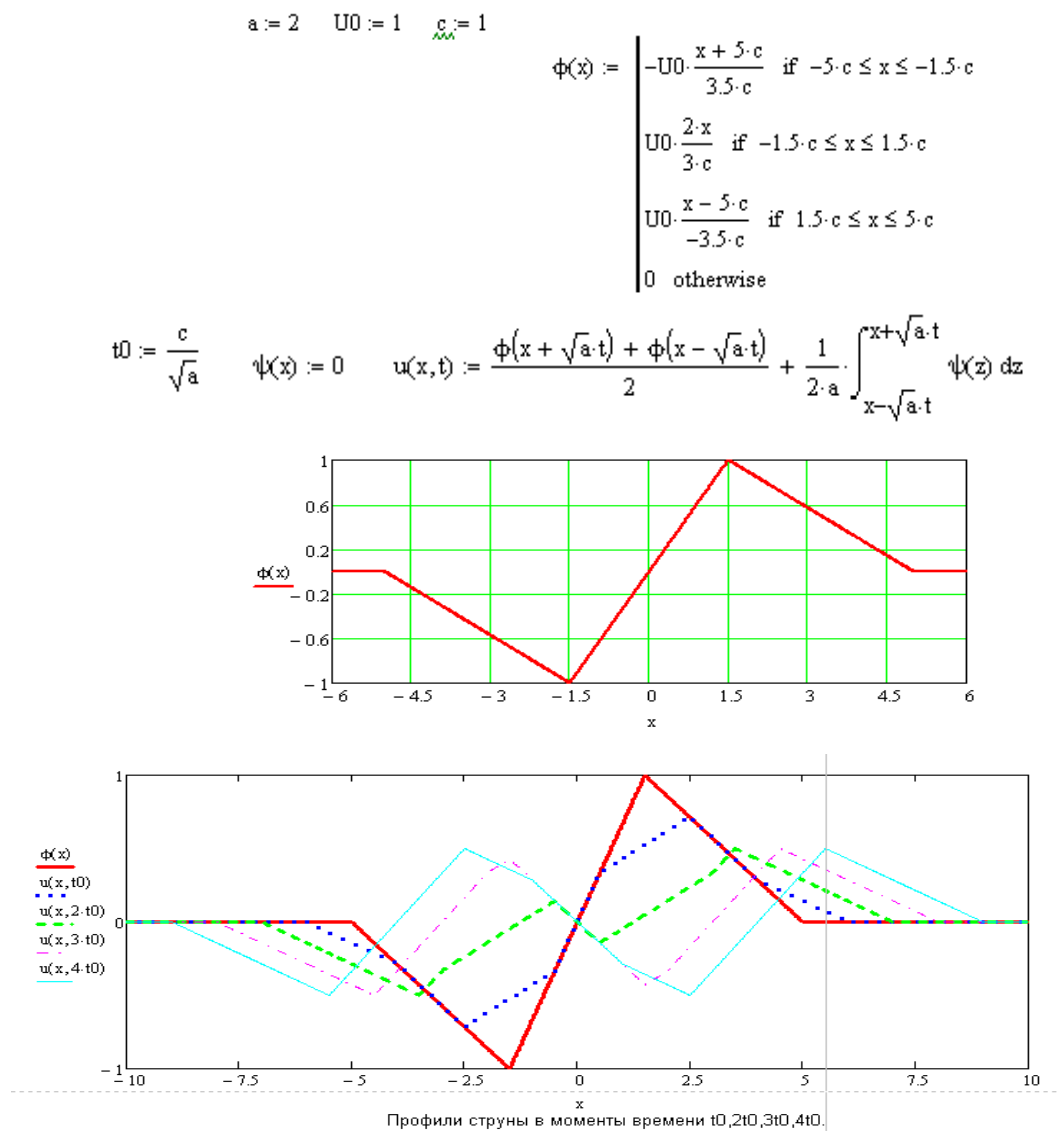


Рис. 3. Листинг решения задачи 2 в пакете MathCAD

Таким образом, для решения одномерных нестационарных задач используется встроенная функция Pdsolve, которая освобождает пользователя от трудоемкой работы с дискретными представлениями математического описания, предоставляет возможность акцентировать внимание на формулировке дифференциального уравнения, начальных и граничных условиях, соответствующих реальной инженерной проблеме [6].

Самым простым и распространенным методом решения задач математической физики, является метод Фурье (метод разделения переменных). Данный метод основан на

представлении функции тригонометрическим рядом, который позволяет успешно аппроксимировать любую функцию. Рассмотрим пример решения задачи данным методом в пакете MathCAD.

**Задача 3.** Решить задачу о колебаниях струны длиной  $L=8$ . Концы струны закреплены. Линейная плотность струны  $\rho=0,8$ , натяжение струны  $T=80$ . Начальное отклонение струны  $u(x,t)$  (в момент времени  $t=0$ ) и начальная скорость  $u_t(x,0)$  определяются графиками на рисунке 4. Значения  $u_0=0$ ,  $u_1=0,025$ ,  $v_0=v_1=0,25$ .

Построить графики прогиба струны для моментов времени  $t_k = \frac{L}{2a}k$ ,  $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ ,  $k=1,2,3,4$ .

Исследовать поведения решения в зависимости от числа членов ряда. Рассмотреть варианты, когда число членов ряда равно 5, 10, 20 и 50 [7].

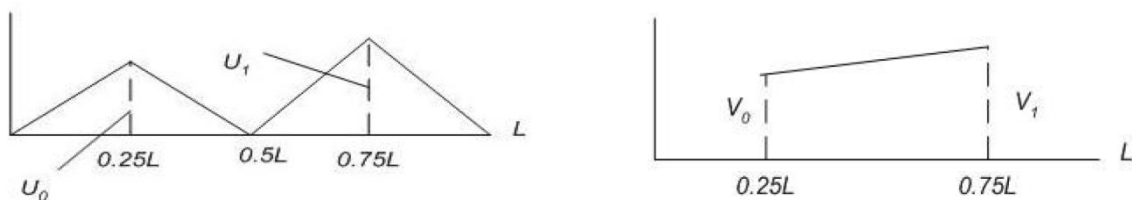


Рис. 4. Профиль начального отклонения и начальных скоростей струны

Реализация решения данной задачи согласно методу Фурье в пакете MathCAD представлена на рисунке 5.

Из многообразия задач, входящих в состав математической физики, мы рассмотрели решения лишь некоторых дифференциальных уравнений с частными производными в математическом пакете MathCAD. Рассмотрев решения этих уравнений, мы хотели показать значимость применения математического пакета MathCAD при изучении математических дисциплин, которое способствует сокращению времени решения задач, глубокому знанию и освоению технологий математического моделирования в данном пакете [8].

$$L := 8 \quad a := 10 \quad N := 100$$

$$\psi(x) := \begin{cases} 0.25 & \text{if } x > 2 \wedge x < 6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \phi(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x > 0 \wedge x < 4 \\ 0.1 \cdot x - 0.4 & \text{if } x > 4 \wedge x < 6 \\ -0.1 \cdot x + 0.8 & \text{if } x > 6 \wedge x < 8 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Phi(n, x) := \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{L}\right) \quad n := 0..N$$

$$n := 1..N + 1 \quad \lambda_n := \left(\pi \cdot \frac{n}{L}\right)^2$$

$$FN_n := \int_0^L \Phi(n, x) \cdot \Phi(n, x) \, dx \quad C_n := \frac{\int_0^L \phi(x) \cdot \Phi(n, x) \, dx}{FN_n}$$

$$n := 1..N + 1 \quad \lambda_n := \left(\pi \cdot \frac{n}{L}\right)^2$$

$$FN_n := \int_0^L \Phi(n, x) \cdot \Phi(n, x) \, dx \quad C_n := \frac{\int_0^L \phi(x) \cdot \Phi(n, x) \, dx}{FN_n}$$

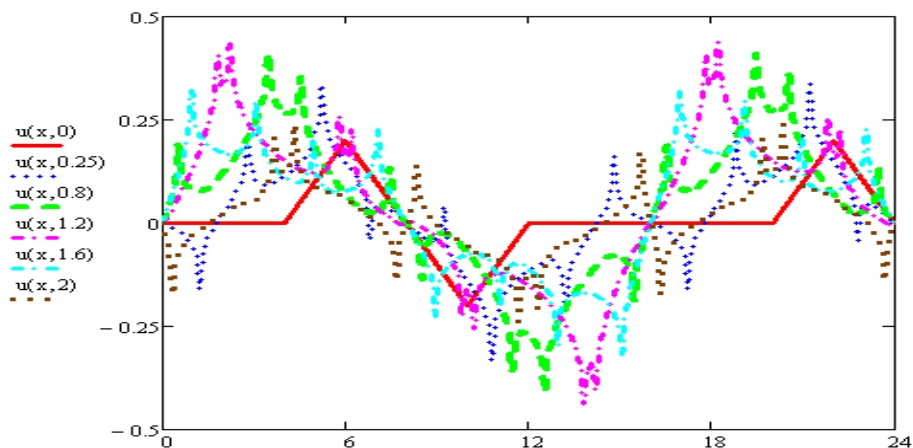


Рис. 5. Листинг решения задачи 3 методом Фурье в пакете Mathcad

**Результаты исследования и их обсуждение.** Таким образом, применение пакета MathCAD при решении задач математической физики делает изучение дисциплин более простым и легким, поскольку избавляет студентов от массы трудоемкой вычислительной работы, а также более интересным и познавательным, поскольку позволяет рассмотреть различные практико-ориентированные математические задачи. Достоинством данного пакета является отсутствие проблемы сквозной передачи данных от одного объекта к другому (например, в задачах на приведение к каноническому виду достаточно изменений в формуле или во входных данных, которое тут же ведет к перерасчету задачи во всей цепи взаимодействия переменных и позволяет студентам не проводить дополнительных громоздких вычислений).



В процессе изучения курса математических дисциплин преподаватель может на практических или лабораторных занятиях обогатить курс примерами решения задач в пакете MathCAD, связанных с различными областями науки и техники. Использование математических пакетов дополнило бы изучение ряда дисциплин и сократило бы время на выполнение расчетно-графических заданий, а также на выполнение курсовых и дипломных проектов.

Реализация алгоритмов математической физики с помощью пакета MathCAD ускоряет процесс обучения, повышает скорость вычислений, увеличивает заинтересованность студентов в изучении материала с помощью компьютерной визуализации и анимации учебной информации [9].

**Заключение.** Анализ способа использования программного пакета MathCAD в изучении математических дисциплин показал повышенный интерес к изучаемому материалу, качественное усвоение математических знаний, возможность применения навыков решения прикладных задач в будущей профессиональной деятельности. Основными достоинствами пакета MathCAD являются интерпретируемость и визуальная ориентируемость языка, а также возможность описать алгоритмы в доступной математической форме с применением общепринятой математической символики.

### Список литературы

1. Будовская Л.М., Тимонин В.И. Введение в математические пакеты: учебное пособие по дисциплине «Введение в математические пакеты». М.: МГТУ им. Н.Э Баумана, 2018. 86 с.
2. Будовская Л.М., Тимонин В.И. Использование компьютерных технологий в преподавании математики // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 5 (17). С. 1-13.
3. Медведева В.В. Решение некоторых задач математической физики с помощью математических пакетов MathCAD и EICUT // Студенческий научный форум: материалы X Международной студенческой научной конференции. [Электронный ресурс]. URL: <https://scienceforum.ru/2018/article/2018000778/> (дата обращения: 02.04.2022).
4. Шавкатбекова Ш.Ш. Реализация методов численного интегрирования и дифференцирования в системе Маткад // Kazakhstan Science Journal. 2019. Т. 2. № 1 (2). С. 57-63.
5. Поляков С.В., Чурбанов А.Г. Свободное программное обеспечение для математического моделирования // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019 № 145. С. 32.

6. Воскобойников Ю.Е., Задорожный А.Ф., Литвинов Л.А., Черный Ю.Г. Решение инженерных задач в пакете MathCAD: учеб. пособие. Новосибирск: НГАСУ. (Сибстрин), 2013. 120 с.
7. Лебедев М.О. Решение задач математической физики на Mathcad. Ч.1.: практикум. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2014. 70 с.
8. Шушкевич Г.В., Шушкевич С.В. Решение задач курса "Уравнения математической физики" в системе MathCad // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике: сборник статей. Брест: БрГУ имени А. С. Пушкина, 2015. С. 110-115.
9. Леонтьев А.Л., Кохановская А.В., Драгныш Н.В. Визуализация решений уравнений математической физики гиперболического типа с помощью MathCAD // Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова. 2018. № 1. С. 212-222.