

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНОЛОГИИ УКРУПНЕНИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ В КУРСЕ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Мучкаева С.С.¹

¹ФГБОУ ВО «Калмыцкий государственный университет имени Б.Б. Городовикова», Элиста, e-mail: muchkayeva2022@bk.ru

Статья посвящена вопросу эффективного обучения студентов профильных физико-математических направлений вуза основам векторного и тензорного анализа. Данная дисциплина имеет большое значение при изучении основных курсов математики и физики, так как закладывает фундамент понимания студентами связи между математическим описанием физических явлений, в частности различие математических объектов, характеризующих физические поля. Современные образовательные стандарты содержат требования к реализации образовательных программ, в том числе к результатам освоения, которые регламентируют формирование различных видов компетенций, освоение большей части которых базируется на обще- методологических принципах, используемых в технологии укрупнения дидактические единиц (УДЕ) – прогрессивной методике обучения, разработанной еще в прошлом веке для математики и активно используемой сейчас на всех уровнях образования во многих дисциплинах. Эта система имеет ряд положений, в частности «блочную» подачу теоретического материала и «одновременное» изучение связанных тем. Так, в данной работе указанные принципы используются при изучении тензорных и векторных величин. Кроме этого, на практических занятиях, в соответствии с принципами УДЕ, необходимо привлекать студентов не только к решению и анализу задач, но и к формулировке новых заданий. Как показал многолетний опыт применения данной методики, при этом студенты не только лучше и быстрее усваивают материал, но и более широко и нестандартно мыслят, показывают высокий уровень сформированности компетенций.

Ключевые слова: дидактическая единица, укрупнение, тензор, вектор.

THE USE OF ELEMENTS OF DIDACTIC UNIT ENLARGEMENT TECHNOLOGY IN THE COURSE OF VECTOR AND TENSOR ANALYSIS

Muchkaeva S.S.¹

¹Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov, Elista, e-mail: muchkayeva2022@bk.ru

The article is devoted to the issue of effective teaching of students of specialized physical and mathematical directions of the University the basics of vector and tensor analysis. This discipline is of great importance in the study of the basic courses of mathematics and physics, as it lays the foundation for students to understand the relationship between the mathematical description of physical phenomena, in particular, the difference of mathematical objects characterizing physical fields. Modern educational standards contain requirements for the implementation of educational programs, including the results of mastering, which regulate the formation of various types of competencies. The development of most of which is based on general methodological principles used in the technology of consolidation of didactic units (UDE) - a progressive teaching methodology developed in the last century for mathematics and is now actively used at all levels of education in many disciplines. This system has a number of provisions, in particular, the «block» presentation of theoretical material and the «simultaneous» study of related topics. So, in this paper, these principles are used in the study of tensor and vector quantities. In addition, in practical classes, in accordance with the principles of UDE, it is necessary to involve students not only in solving and analyzing problems, but also in formulating new tasks. As the long-term experience of using this technique has shown, students not only learn the material better and faster, but also think more broadly and outside the box, show a high level of competence formation.

Keywords: didactic unit, enlargement, tensor, vector.

Образовательный процесс должен чутко реагировать на общественные явления, чтобы подготовить специалистов, которые владеют компетенциями, актуальными в быстро меняющемся мире. Одной из целей Государственной программы Российской Федерации «Развитие образования» [1] является «формирование эффективной системы выявления,

поддержки и развития способностей и талантов у детей и молодежи, основанной на принципах справедливости, всеобщности и направленной на самоопределение и профессиональную ориентацию всех обучающихся». Для достижения этой цели необходимо не только в школе, но и в вузе использовать инновационные методики обучения и контроля знаний, которые способствуют развитию благоприятных условий для профессионального роста и проявления творческого потенциала студентов.

Одной из таких методик является система укрупнения дидактических единиц (УДЕ). Разработанная еще в прошлом веке доктором педагогических наук, профессором, академиком РАО П.М. Эрдниевым для школьной математики с первого по выпускной классы, она содержит ряд обучающих приемов, таких как «единство составления и решения задач», «совместное изучение взаимосвязанных действий» и другие, которые позволяют совершенно по-другому взглянуть на образовательный процесс, привлекая в него элементы креатива и творчества. По оценкам автора технологии УДЕ, при ее применении сокращается время на изучение различных разделов математики и значительно возрастает качество усвоения учебного материала. Этой тематике посвящено большое число статей и методических разработок, проводятся научные конференции, в которых докладчики демонстрируют применение методики УДЕ на различных уроках в школе (например, [2]). Авторы работы [3] подробно разбирают возможности внедрения данной системы в дисциплину «Математика» средней школы и предлагают с помощью системы УДЕ ввести в высшую школу общий предмет «Линейная математика», в котором сочетались бы линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Современные образовательные стандарты для направлений бакалавриата не регламентируют количество зачетных единиц, отводимых на изучение математики, что приводит к существенным различиям в программах разных вузов для одних и тех же направлений. Однако существует ряд основных вопросов, которые необходимо знать студенту вуза. Перечень вопросов определяется направлением подготовки и для студентов физико-математических специальностей – он наиболее широкий. Учитывая значимость фундаментальной математической подготовки этих студентов и ограниченность дисциплин по времени, необходимо использовать новые технологии преподавания высшей математики.

В последние несколько десятков лет стали появляться научные работы, в которых авторы предлагают применять альтернативные образовательные методики при обучении математике в вузе. Так, в работе [4] автор рассматривает сочетание сразу двух методик: педагогики сотрудничества и укрупнения дидактических единиц. «Педагогика сотрудничества» формирует связанные пары, такие как теория – практические приложения, наука – методика обучения, индивидуальная и групповая деятельность и др. В указанной

статье эта технология реализована на зачетном занятии по одному из разделов математического анализа, подробно описан весь ход занятия с указанием на особенности применения вышеуказанного методического приема. Отдельно в этой научной работе рассмотрены задачи по аналитической геометрии, в которых реализован принцип укрупнения дидактических единиц. Эта технология относится к формированию внутренней структуры курса, помогает выстроить последовательность изложения материала и решения тех или иных задач. Так, в работах [5, 6] рассматриваются различные понятия теории вероятностей и математической статистики, которые затем иллюстрируются примерами. Широкое применение технологии УДЕ обусловлено самой природой мышления человека. Здесь реализованы общелогические методы научного познания (анализ и синтез, индукция и дедукция, моделирование и др.) на более высоком «знаковом» (или «символьном») уровне восприятия. Это позволяет по-новому взглянуть на сам процесс обучения – сделать его более эффективным, внедряя «деятельности подход». Например, в статье [7] подробно разбирается методика решения задачи из аналитической геометрии в контексте УДЕ, где в качестве дидактической единицы рассматривается действие. Автор предлагает продолжить работу с задачей и после получения ответа – предложить студентам самим сформулировать более общую задачу на базе уже решенной, постепенно ее укрупняя.

Цель исследования заключается во внедрении элементов системы УДЕ при изучении векторного и тензорного анализа студентами профильных (физико-математических) направлений. В основу изложения теоретического материала закладываются блочные структуры определений и свойств. Проблематика практических занятий структурируется по типу и уровню задач.

Материал и методы исследования

Студенты физико-математических направлений вузов должны свободно ориентироваться в многообразии математических абстракций, описывающих реальные объекты. Именно связь с природным объектом делает математическую модель значимой, помогая обучающимся увидеть логику выражений и символов. В школе учащиеся сталкиваются лишь со скалярными и векторными величинами, при этом акцентируется связь между ними: так, вектор может быть записан через его скалярные компоненты или проекции на указанный набор базисных векторов (чаще единичных). В курсе математики высшей школы появляется новый математический оператор – тензор, вводятся первые тензорные величины в физике (тензор инерции, тензор напряжений).

Важно понимать, что термин «тензор» – это общее математическое описание геометрических объектов, которые имеют величину и любое количество направлений. Тензор порядка p имеет содержимое из p направлений и имеет N^p компонентов. Таким образом, скаляр

– это тензор нулевого порядка, вектор – тензор первого порядка, матрица – тензор второго порядка и т.д.

Хотя любой тензор второго порядка A_{ij} может быть интерпретирован как квадратная матрица, не все квадратные матрицы являются тензорами. Матрицы представляют собой простые массивы произвольных элементов, в то время как тензоры содержат геометрическую информацию о направлении, удовлетворяют законам преобразования для изменения базиса и обладают инвариантными свойствами, независимыми от базиса. Иногда бывает полезно ввести поворот векторного базиса и координат в другую ориентацию. Компоненты и координаты тензора удовлетворяют законам линейного преобразования, которые определяют координаты и компоненты в одном базисе в терминах известных компонентов в другом базисе.

Векторные и тензорные поля также требуют локального базиса в каждой точке для определения векторных/тензорных компонентов. Надо отметить, что обычно используется ортонормированный базис со стандартным обозначением единичных векторов – в декартовой системе координат $\{i, j, k\}$. В вузовском курсе математики на профильных (физико-математических) направлениях студенты переходят к компактной математической записи и от «буквенных обозначений» – к индексной. Введение таких обозначений значительно упрощает не только вид выражений, но и операции с ними. Например, произведение векторов легко записать с помощью специальных символов: Леви-Чевиты – ε_{ijk} и Кронекера – δ_{ij} . Так, в ортонормированном базисе $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$, вектор $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, если $\{i, j, k\} \equiv \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, можно разложить как $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ (с учетом правила о повторяющемся в одночлене индексе, по которому ведется суммирование) [8]. Аналогично вводим определение тензора второго порядка: $\hat{A} = A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$, здесь A_{ij} можно интерпретировать как матрицу тензорных компонент.

Учитывая важность тензорного анализа для физики, можно ввести понятие тензора (табл. 1) и его основные свойства уже в курсе линейной алгебры после изучения матричного исчисления, в рамках технологии укрупнения дидактических единиц. Такое одновременное изучение помогает не только сократить время, затрачиваемое на лекционный материал, освобождая его на решение конкретных примеров и задач, но и показать общность понятий, формируя логику математического мышления будущих специалистов.

Таблица 1

Одновременное введение понятий тензора нулевого, первого и второго рангов

Скаляр (тензор нулевого ранга)	Рис. 1а	a
-----------------------------------	---------	-----

Вектор (тензор первого ранга) $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$	Рис. 1б	$(a_1 \ a_2 \ a_3)$ или $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
Тензор второго ранга $\hat{A} = A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$	Рис. 1в	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

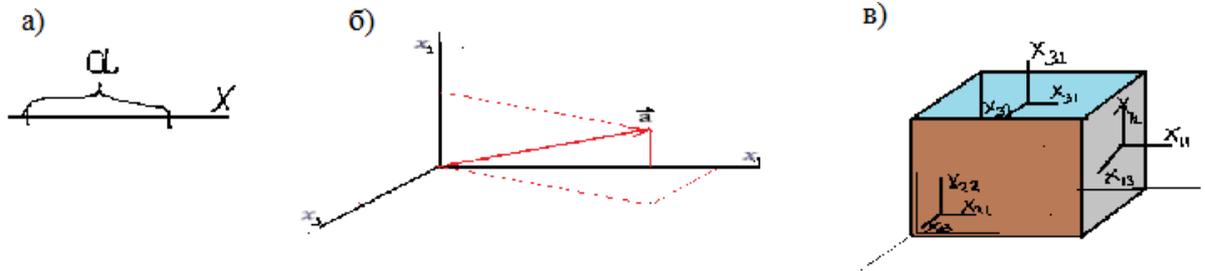


Рис. 1. Графическое представление тензорных величин различного ранга

Далее принцип УДЕ – совместного изучения этих величин – можно распространить на свойства произведения этих величин, которые для наглядности представим в таблице 2.

Таблица 2

Блочное представление произведений тензоров 1-го и 2-го рангов

	вектор	Тензор 2-го ранга
скаляр	$\beta \vec{a} = (\beta a_i) \vec{e}_i$	$\beta \hat{A} = (\beta A_{ij}) \vec{e}_i \vec{e}_j$
Вектор скалярное произведение	$(\vec{a}, \vec{b}) = ((a_i \vec{e}_i), (b_j \vec{e}_j)) = a_i b_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ $= a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$	$\hat{A} \vec{a} = A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j a_i \vec{e}_i = c_j \vec{e}_j$
Вектор векторное произведение	$[\vec{a}, \vec{b}] = [(a_i \vec{e}_i), (b_j \vec{e}_j)] = a_i b_j [\vec{e}_i, \vec{e}_j]$ $= a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$	$[\hat{A}, \vec{a}] = A_{ij} [\vec{e}_i, \vec{e}_j] \vec{e}_i$
Тензор 2-го ранга скалярное произведение	$\vec{a} \hat{A} = a_i \vec{e}_i A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = a_i A_{ij} \vec{e}_j = b_j \vec{e}_j$	$\hat{A} \cdot \hat{B} = A_{ij} B_{jk} \vec{e}_i \vec{e}_k$ (тензор 4-го ранга)

После этого предлагается рассмотреть задачи на использование этих свойств (например, [9]), при решении которых внимание студентов акцентируется на аналогиях в задачах, тем самым устанавливаются логические связи в изучаемом материале. Так, предлагается одновременно решить задачи.

Пример 1. Пусть в некоторой декартовой системе координат К известны компоненты вектора \vec{a} / тензора второго ранга A_{ij} . В системе К', полученной из К поворотом на некоторый угол вокруг оси z, найти компоненты этого вектора/тензора.

Пример 2. Найти собственные векторы и собственные значения тензора, заданного матрицей A_{ij} [10].

В этом примере можно сразу отметить принцип УДЕ: «совместного и одновременного изучения взаимосвязанных операций», который реализуется при решении уравнений вида:

А) $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, λ – скаляр

Б) $\vec{a} = \hat{\Lambda} \vec{b}$, $\hat{\Lambda}$ – тензор второго ранга, описываемый квадратной матрицей Λ_{ij} , $i \neq j$.

Здесь можно подчеркнуть, что в первом случае векторы \vec{a} , \vec{b} являются параллельными, а во втором – нет. Существуют направления, вдоль которых векторы остаются параллельными и в этом случае: это главные направления тензора $\hat{\Lambda}$. Они играют очень важную роль и в математике и в физике. Чтобы их найти, надо перейти от случая Б) к А), то есть потребовать, чтобы все диагональные элементы матрицы Λ были равны: $\Lambda_{ii} = \lambda$, а недиагональные равны нулю или $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, I – единичная матрица. Тогда получаем уравнение:

$$\vec{a} = \lambda I \vec{b} = \hat{\Lambda} \vec{b},$$

$$(\Lambda - \lambda I) \vec{b} = 0,$$

которое позволяет найти собственные значения и собственные векторы (главные направления); вдоль главных осей векторы \vec{a} и \vec{b} параллельны.

После получения искомым выражений можно привести матрицу тензора \hat{A} к диагональному виду в новом ортонормированном базисе. Обсуждением результатов в соответствии с технологией УДЕ решение задачи не должно заканчиваться, студентам можно предложить решить проблемы, связанные с исходной, например построить уравнение тензорной поверхности в старом и новом базисе и др.

Результаты исследования и их обсуждение

Образовательный процесс в высшей школе отличается от школьного – больший акцент делается на самостоятельное изучение учебного материала, особое внимание уделяется практическому обучению и научно-исследовательской составляющей. В этом смысле система УДЕ может стать той методической основой, которая призвана помочь будущему выпускнику бакалавриата добиться профессионализма и личностного роста, свободно ориентироваться в меняющихся условиях.

В процессе работы со студентами факультета математики, физики и информационных технологий использовались элементы теории укрупнения дидактических единиц, как при объяснении теоретического материала, так и на практических занятиях. Для оценки качества успеваемости применялся так называемый индекс среднего балла, когда сравниваются результаты балльно-рейтинговой оценки знаний по итоговому среднему баллу в двух группах. Так, из 100 студентов первого курса примерно половина изучали рассматриваемый раздел

высшей математики с привлечением элементов технологии УДЕ, во второй части традиционно вводились последовательно понятия сначала векторных, а затем тензорных величин. После подведения итогов текущего контроля (тестирования, контрольных работ) оказалось, что качество усвоения материала в контрольной группе выше примерно на 10%.

Тем не менее, ряд важных вопросов все еще остается открытым: были бы результаты другими, если бы студенты выполняли те же действия в группе, а не по отдельности; насколько повлияло каждое из действий (блочная подача лекционного материала, одновременное изучение связанных понятий, решение комплексных задач и т.д.); кроме этого, можно было бы провести ранжирование студентов группы по уровню знаний и учесть ряд других факторов.

Заключение

Одновременное изучение векторных и тензорных величин в курсе высшей математики позволяет добиться более глубокого понимания физического смысла указанных форм; свободного оперирования векторными и тензорными компонентами в выбранном ортонормированном базисе. Как показали результаты практической работы со студентами физико-математических направлений, применение системы УДЕ приводит к росту показателей по формированию нескольких компетенций, как общепрофессиональных, так и универсальных (в частности, в категории «самоорганизация и самообразование»).

Одной из целей настоящей работы было предложить способ изучения основ векторного и тензорного анализа путем введения элементов технологии УДЕ. Этот подход имеет свою учебно-методическую ценность, и для оценки результативности его применения в первом приближении было проведено сравнение результатов текущего контроля знаний по данной теме, которое показало более высокий уровень усвоения материала студентами, которые занимались в группе, где использовался метод УДЕ. Здесь особую значимость приобретает разработка кейс-заданий, которые позволяют определить качественные и количественные показатели уровня сформированности компетенций.

Список литературы

1. Постановление Правительства Российской Федерации от 26 декабря 2017 г. № 1642 (последнее изменение от 07 октября 2021 г. № 1701). [Электронный ресурс]. URL: <https://base.garant.ru/71848426/> (дата обращения: 15.08.2022).
2. Бадиева Л.Б. УДЕ в геометрии // УДЕ – идея века: материалы XIV республиканской научно-практической конференции, посвященной 95-летию академика Российской академии

образования Эрдниева Пюрви Мучкаевича (г. Элиста, 20 октября 2016 г.). Элиста, 2016. С. 14-23.

3. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Кн. для учителей. М.: Просвещение, 1986. 255 с.

4. Дмитриева И.В. Инновационные методы обучения математике в период модернизации высшей профессиональной школы // Казанский педагогический журнал. 2009. № 9-10. С. 45-52.

5. Кипяткова О.С., Ястребов А.В. Укрупненные дидактические единицы как средство реализации принципа фундаментальности в обучении математике // Ярославский педагогический вестник. 2018. № 3. С. 86-93.

6. Радачинская Ю.Н., Гольдварг Т.Б. Использование метода противопоставлений в курсе теории вероятностей // Методика и технология УДЕ в 21 веке: материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, посвящённой 100-летию со дня рождения академика РАО П.М. Эрдниева. Элиста, 2021. С. 47-52.

7. Харитонов Н.Д. Укрупнение дидактических единиц знаний и способов деятельности в обучении математике студентов вузов // Омский научный вестник. 2007. № 5 (59). С. 204-206.

8. Любимов Д.В., Марышев Б.С., Циберкин К.Б. Векторный и тензорный анализ: учеб. пособие. Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2016. 92 с.

9. Малышев А.И., Максимова Г.М. Основы векторного и тензорного анализа для физиков. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. 101 с.

10. Аюпова Н.Б., Таубер Н.М. Задачи и упражнения по курсу «Векторный и тензорный анализ»: учебно-методическое пособие. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2012. 53 с.