УДК 378.14

ФОРМИРОВАНИЕ ПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Шумакова Е.О.[1], Шарафутдинова А.М.[1]

[1]*ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет», Челябинск, e-mail: shumakovaeo@cspu.ru, kuznetsovaam@cspu.ru.*

В работе рассмотрены подходы к изучению комплексных чисел в средней общеобразовательной школе и педагогическом университете. Обсуждается вопрос о пропедевтике изучения комплексных чисел в курсе алгебры на этапе основного общего и среднего общего образования. Приведены примеры тем школьного курса математики, в которых целесообразно начать говорить о комплексных числах. Подчеркнута значимость изучения комплексных чисел в педагогическом университете бакалаврами математического профиля на первом курсе для дальнейшего освоения образовательной программы: изучения основ теории групп и колец, дисциплин «Числовые системы» и «Теория функций комплексного переменного». Указано, какими формулами стоит расширить объем изучения темы «Комплексные числа» в профильных классах средней общеобразовательной школы. Приведены примеры задач, связанных с геометрической интерпретацией комплексных чисел. Показано использование математической динамической среды GeoGebra для решения задач с комплексными числами, построения разности радиус-векторов. Исследованы подходы к решению геометрической задачи о вычислении площади треугольника с введением комплексных координат. Показано использование комплексного метода для решения задачи на доказательство. Рассмотренные примеры демонстрируют взаимосвязь таких математических дисциплин, как алгебра и геометрия.

Ключевые слова: алгебра, геометрия, комплексные числа, предметные результаты, педагогическое образование.

FORMATION OF SUBJECT RESULTS WHEN USING COMPLEX NUMBERS IN PROBLEMS WITH GEOMETRIC CONTENT

Shumakova E.O.[1], Sharafutdinova A.M.[1]

[1]*Federal State Educational Institution of Higher Education South Ural State Humanitarian Pedagogical University, Chelyabinsk, e-mail: shumakovaeo@cspu.ru, kuznetsovaam@cspu.ru.*

The paper considers approaches to the study of complex numbers in secondary school and pedagogical university. The issue of propaedeutics of studying complex numbers in the algebra course at the stage of basic general and secondary general education is discussed. Examples of topics of the school mathematics course in which it is advisable to start talking about complex numbers are given. The importance of studying complex numbers at the Pedagogical University by bachelors of mathematics in the first year for further development of the educational program: studying the basics of the theory of groups and rings, the disciplines "Numerical systems" and "Theory of functions of a complex variable" is emphasized. It is indicated by which formulas it is necessary to expand the scope of studying the topic complex numbers in specialized classes of secondary school. Examples of problems related to the geometric interpretation of complex numbers are given. The use of the mathematical dynamic environment GeoGebra for solving problems with complex numbers, constructing the difference of radius vectors is shown. Approaches to solving the geometric problem of calculating the area of a triangle with the introduction of complex coordinates are investigated. The use of a complex method for solving the problem of proof is shown. The considered examples demonstrate the interrelation of such mathematical disciplines as algebra and geometry.

Keywords: algebra, geometry, complex numbers, subject results, pedagogical education.

Изучение математики в школе начинается с изучения небольшой области чисел, которая постепенно расширяется, и вводятся новые понятия. Знакомство с числами учащиеся начинают с натуральных чисел, позже вводятся отрицательные числа и нуль. Решение простейших практических задач, в которых требуется провести измерения, не обходится без введения понятия дробного числа. Иррациональные числа могут быть введены как длина диагонали квадрата со стороной 1, не являющаяся рациональным числом. Для решения простейших квадратных уравнений с натуральными коэффициентами действительных чисел становится недостаточно, используем новые числа, которые сначала назывались мнимыми, а затем комплексными, для них квадратный корень из отрицательного числа имеет смысл.

Разделом «Комплексные числа» во многих учебно-методических комплексах завершается основная образовательная программа по предмету «Алгебра и начала математического анализа» в 10-11 классах. Выделим основные причины такого подхода: во-первых, комплексные числа показывают связь алгебры, геометрии и тригонометрии; во-вторых, дают возможность увидеть структуру изученных числовых множеств и операций с этими множествами, открывают возможность в решении широкого класса задач алгебраического и геометрического содержания. Кроме того, решение большого количества задач техники и физики сводится к решению квадратного уравнения, у которого отрицательный дискриминант. Такие уравнения не имеют решения на множестве действительных чисел, но, несмотря на это, их решение имеет физический смысл.

Комплексные числа пока не входят в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике, но их включение не исключено. Такие задания проходят апробацию и представлены ФИПИ в перспективной модели на 2022 год по математике профильного уровня, есть большая вероятность, что такие задания появятся на ЕГЭ в ближайшие годы. Целью работы является описание возможностей улучшить формирование предметных результатов по теме комплексные числа в курсе алгебры и геометрии.

Материалы и методы исследования

Для проведения исследования использовались теоретические методы: сравнительно-сопоставительный анализ учебно-методических комплексов по алгебре и началам математического анализа для 10 и 11 классов [1-3], учебных пособий по алгебре для педагогических вузов [4; 5], анализ педагогического опыта в процессе работы со студентами первого курса педагогического вуза в рамках преподавания дисциплин «Вводный курс математики» и «Алгебра», темы «Комплексные числа».

Результаты исследования и их обсуждение

Выполненный анализ позволяет сделать вывод о близком содержании темы «Комплексные числа» в пособиях [1-3]. Набор заданий ограничивается стандартными вычислениями в алгебраической и тригонометрической форме, решении линейных и квадратных уравнений. Наибольший интерес, и в то же время трудность, представляют задачи, связанные с геометрическим изображением комплексных чисел. Изучение темы в конце 11 класса сопряжено с сокращением и без того небольшого количества часов, так как часто необходимо уделить время повторению и подготовке к итоговым экзаменам. Поэтому, сталкиваясь с этой темой в университете, студенты испытывают трудности. Обучающимся в классах физико-математического и технологического профилей для лучшего в дальнейшем усвоения и понимания данного материала можно было бы начать освещать данную тему раньше, чем в 11 классе.

Например, после изучения свойства степени учеников можно познакомить с возведением в степень мнимой единицы. После знакомства с законами сложения векторов стоит рассказать о сложении комплексных чисел по правилу параллелограмма, а также о том, что каждое комплексное число можно задать с помощью радиус-вектора на плоскости, соединив начало координат и точку $(x; y)$, соответствующую комплексному числу $z = x + yi$.

Для школьников и студентов большой интерес будут представлять задания, выполняемые с использованием электронных образовательных ресурсов. Одной из программ, позволяющих работать с комплексными числами, является математическая динамическая среда GeoGebra. В работах [6; 7] рассмотрено применение GeoGebra в исследовательской деятельности бакалавров по математическим дисциплинам. Школьникам можно предложить построить в GeoGebra радиус-векторы, соответствующие комплексным числам, найти их длины. Покажем пример построения радиус-векторов, соответствующих комплексным числам $z_1 = -1 + 3i$ и $z_2 = 1 + 4i$, а также использования команды «Вектор($z_1 - z_2$)» для получения разности двух векторов $\overrightarrow{z_1} - \overrightarrow{z_2}$ (рис. 1).

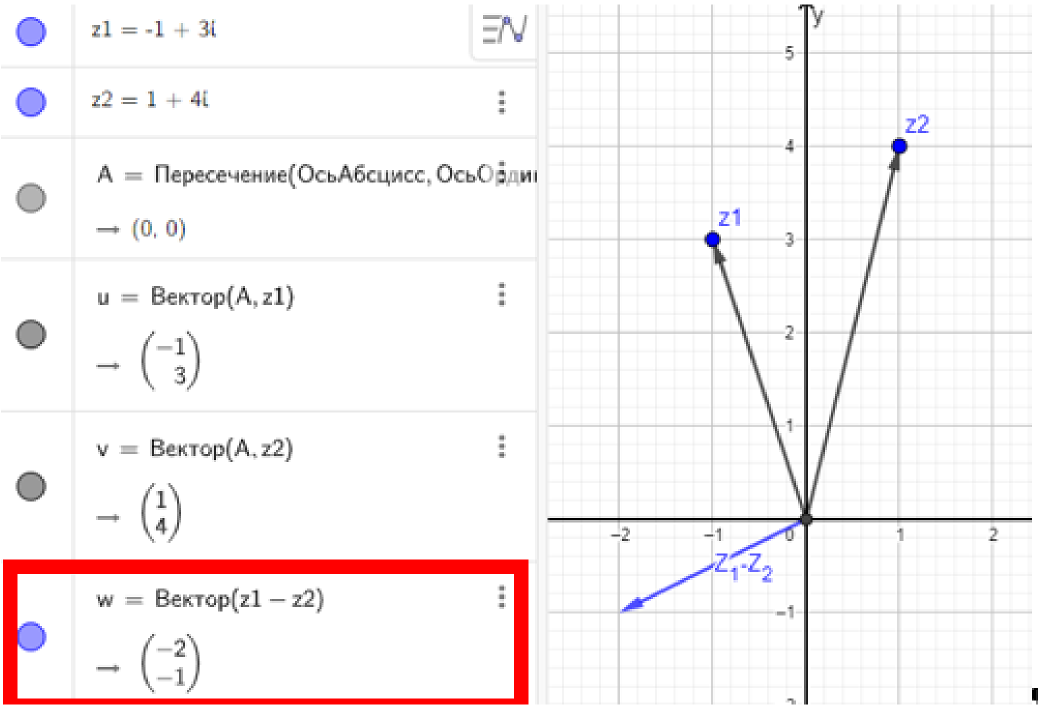

Рис. 1. Радиус-векторы на плоскости в GeoGebra

Комплексный метод решения планиметрических задач является наименее распространенным, и в школе он совсем не рассматривается. Сопоставление точки K с координатами $(x;y)$ и комплексного числа $z=x+yi$ будем считать *комплексной координатой* точки $K(z)$. Число $\bar{z}=x-yi$ назовем комплексно-сопряженным с $z=x+yi$. При таком подходе можно доказать формулы, используемые в дальнейшем при решении геометрических задач [8], например:

1. Для точек $A(a)$ и $B(b)$ число $c=a+b$ будет являться координатой точки C, такой, что $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Число $d=a-b$ будет координатой для точки $D(d)$, где выполняется $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

2. Формула для нахождения площади положительно ориентированного треугольника

$$S_{ABC}=\frac{1}{4i}\left(a\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+b(\bar{a}-\bar{c}\right)+c(\bar{b}-\bar{a})).$$

3. Общее уравнение окружности в комплексных координатах с центром S(s) и радиусом r имеет вид: $(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=r^2$, если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности определяется следующим образом: $z\bar{z}=r^2$.

4. Два отрезка AB и CD ортогональны тогда и только тогда, когда число $\frac{a-b}{c-d}$ является чисто мнимым.

5. Формула для отыскания комплексной координаты точки $C(c)$, делящей отрезок AB ($A(a)$, $B(b)$) в заданном отношении λ ($\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$)

$$c=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}(\lambda\neq -1).$$

6. Формула для нахождения расстояния между двумя точками $A(a)$ и $B(b)$

$$AB^2=(a-b)\left(\bar{a}-\bar{b}\right).$$

Покажем использование этого подхода при решении геометрических задач.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена медиана AD. Точка K принадлежит данной медиане, и известно, что $AK=4$. Найдите площадь треугольника BKC, если $BC=6, AC=4$.

Решение: из треугольника ACD по теореме Пифагора найдем AD:

$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Тогда $KD=1$.

Введем прямоугольную систему координат, в которой прямая AC задает мнимую ось, а прямая CB действительную. Точку C будем считать за начальную. Запишем координаты точек в новой системе координат: $C(0)$, $B(6)$, $D(3)$, $A(4i)$, $K(z)$ (рис. 2).

Точка K принадлежит AD, следовательно, векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны и $\frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}=\frac{4}{1}$.

Комплексное число $z-4i$ является координатой вектора $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CA}$. Вектору $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CK}$ соответствует комплексное число $3-z$.

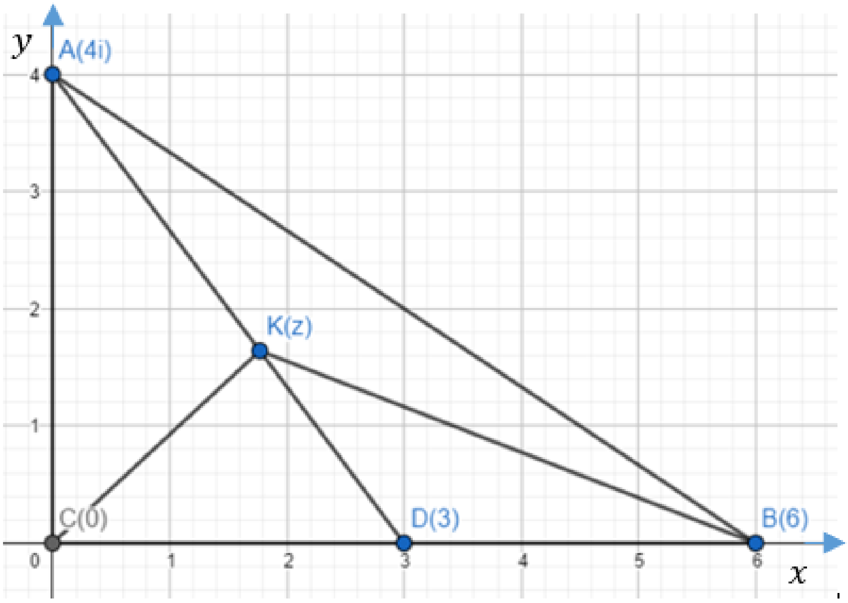

Рис. 2. Треугольник ABC в системе координат

Тогда $\frac{z-4i}{3-z} = \frac{4}{1}$ и выразим $z = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$.

Далее можем использовать формулу вычисления площади положительно ориентированного треугольника:

$$S_{BKC} = \frac{1}{4i} \cdot \left(0 + 6\left(0 - \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right) + \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)(6 - 0)\right) = 2{,}4.$$

Можно завершить решение, не используя формулу площади треугольника: по координате точки К высота треугольника BKC равна $h = \frac{4}{5}$, и тогда

$$S_{BKC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 2{,}4.$$

Ответ: $S_{BKC} = 2{,}4$.

Комплексный метод применим не только для решения задач вычислительного характера, но и для задач на доказательство.

Задача 2. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон [9].

Доказательство: рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть точки M, N, P середины сторон AB, BC, AC соответственно. Докажем, что имеет место равенство

$$AN^2 + BP^2 + CN^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

Обозначим комплексные координаты точек соответствующими малыми буквами. Так как точки M, N, P делят отрезки AB, BC, AC соответственно в отношении $\lambda = 1$, то их комплексные координаты равны полусуммам комплексных координат концов соответствующих отрезков: $m = \frac{a+b}{2}$, $n = \frac{b+c}{2}$, $p = \frac{a+c}{2}$.

Далее, используя формулу для нахождения расстояния между двумя точками, получим:

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) + (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) + (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) =$$

$$= 2(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}) - (a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b} + a\bar{c} + c\bar{a}),$$

$$AN^2 + BP^2 + CN^2 = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)\left(\bar{a} - \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}\right) + \left(b - \frac{a+c}{2}\right)\left(\bar{b} - \frac{\bar{a}+\bar{c}}{2}\right) +$$

$$+ \left(c - \frac{a+b}{2}\right)\left(\bar{c} - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}) - \frac{3}{4}(a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b} + a\bar{c} + c\bar{a}) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(2(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}) - (a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b} + a\bar{c} + c\bar{a})\right) = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

Рассмотренные задачи показывают связь алгебраической формы записи комплексного числа и координат точки на плоскости, прослеживается связь с векторным методом решения задач. Тема может быть предложена для учебно-исследовательских проектов по алгебре и геометрии. Обучающимся может быть предложено вывести уравнения прямых, формулы для вычисления углов между векторами или прямыми в комплексных координатах, деление отрезка в данном отношении. Круг задач может быть расширен, например задачами, связанными с уравнениями окружности и прямой, поиском наименьшего расстояния, и другими.

Решение межпредметных задач обеспечивает перенос знаний из одной предметной области в другую [6], показывает взаимосвязь дисциплин. Для студентов младших курсов многие понятия основ теории групп являются сложными, усвоение происходит поверхностно, а значит навыки и умения, необходимые для дальнейшего изучения курса алгебры и теории функций комплексного переменного, формируются недостаточно. Эту проблему помогают решить предметные и межпредметные учебно-исследовательские проекты за счет самостоятельности выполнения и более глубокого понимания взаимосвязей математических объектов [10; 11].

Изучение комплексных чисел на первом курсе знакомит студентов с понятием поля $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, отличающегося от поля действительных чисел. Позволяет приводить пример циклической группы комплексных корней n-й степени из единицы, принадлежащих единичной окружности и являющихся вершинами правильного n-угольника

$$\sqrt[n]{1} = \left\{E_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), k = 0,1, \dots n-1\right\}.$$

Становится возможным знакомство с понятием первообразного корня из единицы, как порождающего элемента циклической группы, что является пропедевтикой изучения основ теории групп и теории колец. Изображение комплексных корней n-й степени из комплексного числа на декартовой плоскости иллюстрирует геометрическую интерпретацию комплексного числа и формулы действий с комплексными числами в тригонометрической форме. Отметим, что изучение комплексных чисел на первом курсе студентам педагогического университета направленности «Математика» дается довольно сложно. Для выполнения арифметических действий требуется запомнить несколько формул, осознать, что корней n-й степени существует n штук, а не один, как для действительных чисел. Поэтому возрастает важность усвоения первоначальных понятий в школе и рассмотрение задач разной сложности в университете.

Комплексные числа с целыми действительной и мнимой частью дают важный пример в теории евклидовых колец – кольца целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni;\ m, n \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$. В этом кольце существенно сложнее выполняется деление с остатком и реализуется алгоритм Евклида по поиску наибольшего общего делителя, поэтому важно без затруднений выполнять стандартные действия с комплексными числами. Стоит отметить, что теория групп и теория групповых колец – активно развиваются в настоящее время, а значит дают возможность студентам познакомиться с современными научными исследованиями [12].

Владение комплексными числами позволяет перейти к построению алгебры кватернионов $\mathbb{K} = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\}$ при изучении дисциплины «Числовые системы», легче освоить принципы выполнения действий с кватернионами, решение уравнений в $\mathbb{K}$.

Выводы

Описанный подход к изучению комплексных чисел позволяет осуществить пропедевтику темы, а также, помимо решения стандартных задач, проследить связь комплексных чисел с геометрией, векторным методом решения задач. Использование динамической среды GeoGebra разнообразит виды деятельности на занятиях, поможет осуществить проверку выполненных вычислений для самоконтроля. На ступени высшего образования педагогического направления обучения комплексные числа и их геометрическая интерпретация получают еще большую значимость, показывают взаимосвязь различных математических дисциплин и способствуют формированию предметных результатов на протяжении всего периода обучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет» по договору на выполнение научно-исследовательских работ №16-387 от 15.06.2022 г. по теме «Исследование порождающих элементов групп центральных единиц целочисленных групповых колец».

Список литературы

1. Мордкович А.Г., Семенов П.В., Денищева Л.О. Алгебра и начала математического анализа 10 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углубленный уровень) в 2 ч. М.: Мнемозина, 2021. 806 с.
2. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (углубленный уровень). М.: Мнемозина, 2015. 312 с.
3. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. М.: Просвещение, 2022. 464 с.
4. Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. М.: Физматлит, 2001. 464 с.
5. Воробьева И.А. Линейная алгебра, аналитическая геометрия, теория пределов: сборник задач. Липецк: ЛГПУ имени П.П. Семёнова-Тян-Шанского, 2018. 61 с.
6. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю. Математическое моделирование в учебных проектах бакалавров по профильным математическим дисциплинам // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 10. С. 216-220.
7. Нигматулин Р.М., Мартынова Е.В. Использование системы динамической геометрии Geogebra для организации исследовательской деятельности бакалавров педагогического образования в курсе геометрии // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2019. С. 193-197.
8. Посицельская Л.Н. Теория функций комплексной переменной в задачах и упражнениях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 136 с.
9. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. М.: МЦНМО, 2004. 160 с.
10. Шумакова Е.О., Миссаль В.В. Применение технологии учебных проектов при изучении профильных математических дисциплин // Современные проблемы науки и образования. 2019. № 6. [Электронный ресурс]. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=29269 (дата обращения: 17.10.2022).
11. Шумакова Е.О., Шарафутдинова А.М., Ахкамова Ю.А., Алябьева Ю.В. Учебно-исследовательские проекты по профильным математическим дисциплинам // Современные проблемы физико-математических наук: материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Орел, 2020. С. 590-593.
12. Shumakova E.O. Groups of central units of rank 1 of integral group rings of Frobenius

metacyclic groups. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. vol. 18. no. 1. P. 622-639.