УДК 372.851

ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ 5–6 КЛАССОВ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Черкасова А.М., Аммосова Н.В.

ФГБОУ ВО Астраханский государственный университет, Астрахань, e-mail: amcherk@mail.ru, n_ammosova@mail.ru

Понятие множества – фундаментальное понятие математики, являющееся первичным, неопределяемым. С ним на интуитивном уровне знакомятся дети еще в начальной школе, а затем пользуются им на протяжении всех лет школьного обучения. Однако в программе по математике и учебниках для 5-го класса это важное понятие не встречается, и возвращаются к нему лишь в 6-м классе. Это отрицательно сказывается на обучении школьников. Учащиеся испытывают трудности в усвоении понятия множества, его свойств и операций над множествами. Поэтому нами разработана методика изучения первоначальных понятий теории множеств и операций над ними и проведено исследование по выяснению эффективности предлагаемой методики, включающей систему заданий, расположенных по принципу «от простого к сложному», содержащих дозированную помощь, в которой с каждым последующим заданием мера помощи уменьшается, а доля самостоятельности ученика возрастает. Приведен пример такой системы заданий по одному из разделов теории множеств. Результаты экспериментальной работы показали: уровень практических умений учащихся в экспериментальной группе повышается, чего не наблюдается в контрольной группе.

Ключевые слова: обучение, школьник, математика, методика, множества.

TEACHING 5–6 GRADE STUDENTS TO THE ELEMENTS OF SET THEORY

Cherkasova A.M., Ammosova N.V.

FSBEI HE «Astrakhan State University», Astrakhan, e-mail: amcherk@mail.ru, n_ammosova@mail.ru

The concept of a set is a fundamental concept of mathematics, which is primary, undefined. Children get acquainted with it on an intuitive level in elementary school, and then use it throughout all the years of schooling. However, this important concept is not found in the mathematics curriculum and textbooks for the 5th grade and is returned to only in the 6th grade. This has a negative impact on student learning. Students experience difficulties in mastering the concept of a set, its properties and operations on sets. Therefore, we have developed a methodology for studying the initial concepts of set theory and operations on them and conducted a study to determine the effectiveness of the proposed methodology, which includes a system of tasks arranged according to the principle from simple to complex, containing dosed help, in which with each subsequent task the measure of help decreases, and the share student independence increases. An example of such a system of assignments for one of the sections of set theory is given. The results of the experimental work showed that there is a tendency to increase the level of practical skills of students in the experimental group compared to the control group.

Keywords: education, student, mathematics, methodology, sets.

В математике понятие множества считается одним из основных. Под множеством понимают собрание объектов какого-либо рода, например множество книг, множество игрушек, множество домов, множество чисел. Объекты, составляющие множество, называются элементами множества.

Теория множеств является основным разделом математики. А само понятие множества относится к фундаментальным и первичным понятиям в математике. Понятия теории множеств применяют при формулировке многих понятий математики школьного курса. Язык теории множеств используется при обучении учащихся школьному курсу математики, но не применяется в обосновании школьного курса математики.

При решении различных задач из курса математики 5–6-х классов у учащихся возникают проблемы, связанные с недостатком знаний о множествах и операций над множествами. Понятиями «множество чисел» и «множество геометрических фигур» пользовались до того, как возникла теория множеств. При этом геометрические фигуры трактовались как целостные объекты, а не как состоящие из точек. Для задания геометрической фигуры в математике применялись конечные наборы точек. Например, для того, чтобы задать отрезок, достаточно было задать две точки – границы отрезка, не обращая внимания на множество точек между ними. Теория множеств и теоретико-множественный подход к определению математических понятий позволили геометрические фигуры определять как множества некоторых объектов.

Анализ учебников [1–3] по математике за 5-й класс позволил выявить, что в 5-м классе школьники не изучают тему «Множества». Начинается изучение этой темы только в 6-м классе, хотя на интуитивном уровне этим понятием пользуются и в начальной школе. Такой перерыв в овладении учащимися теоретико-множественными понятиями является неоправданным, отрицательно сказывается на качестве знаний школьников.

При изучении темы «Умножение и деление десятичных дробей» в 5-м классе по программе «Математика-5» Н.Я. Виленкина и иных [4] учащиеся должны научиться приводить примеры конечных и бесконечных множеств. При изучении темы «Делимость чисел» в 6-м классе по программе «Математика-6» Н.Я. Виленкина и иных [5] учащиеся знакомятся с понятиями объединения и пересечения множеств, учатся изображать эти понятия с помощью диаграмм Эйлера–Венна.

При изучении курса математики 6-го класса по программе «Математика-6» С.М. Никольского и иных [6] учащиеся знакомятся с понятиями числовых множеств: множества целых чисел, множества рациональных чисел, осваивают понятия конечных и бесконечных числовых множеств.

В учебнике «Математика-6» Г.В. Дорофеева и иных [7] имеется глава «Множества. Комбинаторика», в которой выделены следующие разделы: 1) Понятие множества; 2) Операции над множествами; 3) Решение задач с помощью кругов Эйлера; 4) Комбинаторные задачи.

В результате изучения данной главы шестиклассники должны научиться: 1) приводить примеры конечных и бесконечных множеств натуральных и множеств целых чисел; 2) владеть операциями объединения и пересечения конкретных множеств; 3) изображать множества с помощью кругов Эйлера–Венна; 4) выявлять соотношения между числовыми множествами; 5) приводить примеры несложных классификаций из различных областей жизни; 6) решать комбинаторные задачи методом перебора вариантов.

Г.В. Дорофеев в учебнике «Математика-6» рассматривает понятия множества, конечного бесконечного множества, пустого множества, подмножества, две операции над множествами (объединения и пересечения).

На многие понятия теории множеств, которыми школьники пользуются при изучении новых тем, не обращается должного внимания. Например, перед изучением тем «Сравнение натуральных чисел», «Сложение и вычитание натуральных чисел» в 5-м классе целесообразно познакомить учащихся с понятиями «множество», «числовое множество», «множество натуральных чисел».

Эффективному усвоению учащимися 5–6-х классов элементов теории множеств, на наш взгляд, способствует система заданий, расположенных по принципу «от простого к сложному», содержащих дозированную помощь. С каждым последующим заданием мера помощи уменьшается, а доля самостоятельности ученика возрастает.

Цель исследования: показать, что использование системы заданий, расположенных по принципу «от простого к сложному», содержащих дозированную помощь, в которой с каждым последующим заданием мера помощи уменьшается, а доля самостоятельности ученика возрастает, способствует эффективному усвоению учащимися элементов теории множеств и повышению уровня практических умений при выполнении заданий по данной теме.

Материалы и методы исследования. Для достижения поставленных целей были проведены анализ и критическое осмысление методико-математической литературы по проблеме исследования, а также состояния исследуемой проблемы в практике работы школы. Далее проведен эксперимент с целью выявления влияния системы заданий, расположенных по принципу «от простого к сложному», содержащих дозированную помощь, в которой с каждым последующим заданием мера помощи уменьшается, а доля самостоятельности ученика возрастает, на повышение уровня практических умений учащихся по теме «Теория множеств».

Результаты исследования и их обсуждение. В качестве примера рассмотрим систему заданий, расположенных по принципу «от простого к сложному», содержащих дозированную помощь, в которой с каждым последующим заданием мера помощи уменьшается, а доля самостоятельности ученика возрастает, по двум темам теории множеств. Перед заданиями дается краткая теория по данной теме. В школьных учебниках для 5–6-х классов Г.В. Дорофеева, Н.Я. Виленкина задания по теме «Теория множеств» расположены бессистемно и не содержат дозированной помощи.

Тема 1. Множества. Элементы множества

Изучаем теорию: Множествами называют различные совокупности объектов. Объектами могут быть натуральные числа, квадраты, буквы русского алфавита и другие объекты. Множества на письме обозначают заглавными буквами латинского алфавита: А, Х, С, ..., У.

Множество, которое не содержит ни одного объекта, называется пустым множеством и обозначается символом $\emptyset$. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества. Элементы множества обозначают строчными буквами латинского алфавита: a, x, c, y. Для обозначения принадлежности элемента x множеству X применяют знак $\in$ – «$x \in X$». Если элемент x не принадлежит множеству X, то используют запись: «$x \overline{\in} X$», или « $x \notin X$». Обозначения числовых множеств: N – множество натуральных чисел, N_0 – множество целых неотрицательных чисел, Z – множество целых отрицательных чисел, Q – множество рациональных чисел.

Выполняем следующие задания:

<u>Задание 1</u>. Назовите три элемента множества:

✓ Дней недели;

✓ Нечетных натуральных чисел;

✓ Целых чисел, делящихся на пять;

✓ Четырехугольников.

Продолжи перечислять элементы множеств:

✓ Понедельник, вторник,________________;

✓ 3, 5, ________________

✓ 10, 15, ________________

✓ Квадрат, трапеция, _______________

<u>Задание 2</u>. Запишите, используя символы:

✓ Число 7 – целое;

✓ число – 4 не является целым неотрицательным числом;

✓ Число 0 – целое;

✓ -3 – число отрицательное.

Продолжи выполнять по образцу.

✓ $7 \in Z$;

✓ $-4 \notin N_0$;

✓ __________;

✓ __________.

<u>Задание 3</u>. Укажите, верными или неверными являются высказывания:

a) $-3 \notin N$ c) $5{,}36 \in Q$ e) $0 \in Z$

b) $10 \in Z$ d) $0{,}5 \in N$ f) $100 \in N$

Решение:

a) ________________, b) ________________, c) _________________

c) _______________, d) ________________, f) _________________

<u>Задание 4</u>. L – множество целых чисел, больших 9 и меньших 16. Запишите с помощью знаков ∈ и ∉ , какие из чисел 7, 8, 6, 12, 15, 16 ему принадлежат, а какие не принадлежат.

Решение

____

____

<u>Задание 5</u>. Даны числа 1; 0; – 12; –16; 125; 3. Определите, какие из них являются:

a) натуральными;
b) целыми;
c) целыми неотрицательными.

Решение :

a) __________________; b)_____________________; c)__________________________.

<u>Задание 6</u>. С – множество точек окружности, изображенной на рисунке 1:

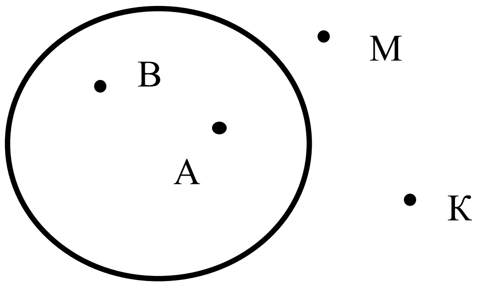

Рис.1

Укажите верные высказывания: а) A ∈ C, b) B ∉ C, c) M ∈ C, d) K ∉ C.

Решение:

a) _____________;
b) _____________;
c) _____________;
d) _____________;

Тема 2. Способы задания множеств

Изучаем теорию: Говорят, что множество является заданным, если о каждом объекте этого множества можно сказать, принадлежит он данному множеству или не принадлежит.

Множество можно задать путем перечисления всех его элементов или указания характеристического свойства его элементов. Характеристическое свойство множества – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Выполняем следующие задания:

Задание 1.

Запишите, используя знака равенства и фигурные скобки, следующие предложения:

a) К – множество однозначных чисел;
b) М – множество букв a, b, c, d;
c) L – множество, состоящее из треугольника, круга и ромба.

Продолжи выполнять по образцу:

a) $К = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
b) ____________________
c) ____________________

Задание 2.

Запишите с помощью символов множество Д, если оно состоит из целых чисел:

a) больших 80, но меньших 100;
b) меньших 1200;
c) больших –5, но меньших 3.

Продолжи выполнять по образцу:

a) $M = \{x \in Z, 80 < x < 100\}$
b) ________________________
c) ________________________

Задание 3.

Перечислите элементы следующих множеств:

А – множество четных двузначных чисел;

В – множество нечетных двузначных чисел;

С – множество натуральных чисел, меньших или равных 12;

Д – множество двузначных чисел, делящихся на 5.

Решение:

a) ___________________________________;
b) ___________________________________;
c) ___________________________________;
d) ___________________________________;

Задание 4.

Укажите характеристическое свойство элементов множества:

1. {а, е, ё, и, о, у, э, ю, я, ы};
2. {46, 69, 92, 115, 138};
3. {111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999}

Продолжи выполнять по образцу:

1. Множество гласных букв русского алфавита;
2. ____;
3. ____;

Задание 5.

К – множество трехзначных чисел, в записи которых встречается цифра 2. Принадлежат ли этому множеству числа 23; 322; 261; –112?

Ответ запишите, используя знаки $\in$ и $\notin$

Продолжите выполнять по образцу:

23 $\notin$ К, ______________________________

Задание 6.

Множество С состоит из числа 26, отрезка и трапеции. Принадлежат ли этому множеству диагональ трапеции, середина отрезка и число 13 – делитель числа 26?

Решение:

____.

В эксперименте по выявлению уровня влияния использования системы заданий, расположенных по принципу «от простого к сложному», содержащих дозированную помощь, в которой с каждым последующим заданием мера помощи уменьшается, а доля самостоятельности ученика возрастает, на повышение уровня практических умений учащихся 5–6-х классов принимали участие школьники двух групп в течение 2020/2021 учебного года. В контрольной группе (120 человек) обучение элементам теории множеств проводилось без применения системы заданий, расположенных по принципу «от простого к сложному», содержащих дозированную помощь, в которой с каждым последующим заданием мера помощи уменьшается, а доля самостоятельности ученика возрастает, а в экспериментальной группе (130 человек) – с использованием разработанной системы заданий. Учащимися контрольной группы выполнялись те же самые задания, что и учащимися экспериментальной группы, только без дозированной помощи. Для оценки эффективности использования системы заданий, расположенных по принципу «от простого к сложному», содержащих дозированную помощь, в которой с каждым последующим заданием мера помощи уменьшается, а доля самостоятельности ученика возрастает, были выделены уровни распределения учащихся. Уровни выявлялись по следующим показателям: умение выполнять задания на использование языка теории множеств и умение выполнять задания на выполнение операций над множествами. Критериями распределения детей по уровням выступали отметки: «5» – высокий уровень (2 показателя в полном объеме), «4» – средний уровень (2 показателя, но не в полном объеме, с небольшими замечаниями), «3–2» низкий уровень (2 или 1 показатель с серьезными ошибками, отсутствие показателей).

Полученные результаты на начало эксперимента приведем в таблице 1.

Таблица 1

Результаты на начало эксперимента

Группа	Количество учащихся высокого уровня	Количество учащихся среднего уровня	Количество учащихся низкого уровня
Контрольная	28	50	42
Экспериментальная	30	56	44

Приведем результаты, полученные на конец эксперимента в таблице 2.

Таблица 2

Результаты на конец эксперимента

Группа	Количество учащихся высокого уровня	Количество учащихся среднего уровня	Количество учащихся низкого уровня
Контрольная	29	51	40
Экспериментальная	45	63	22

Согласно таблицам можно заключить, что уровень практических умений школьников экспериментальной группы повышается по сравнению с уровнем участников контрольной группы.

Заключение. Использование разработанной нами системы заданий, расположенных по принципу «от простого к сложному», содержащих дозированную помощь, в которой с каждым последующим заданием мера помощи уменьшается, а доля самостоятельности ученика возрастает, способствует эффективному усвоению элементов теории множеств и повышению уровня практических умений учащихся, что подтвердил проведенный нами эксперимент.

Список литературы

1. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Математика: 5 кл. М.: Мнемозина, 2019. 368 с.

2. Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. Математика: 5 кл. М.: Просвещение, 2017. 303 с.

3. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Математика: 5 кл. М.: Просвещение, 2019. 272 с.
4. Сборник рабочих программ (ФГОС). 5-6 классы: пособие для учителей общеобразовательных учреждений / сост. Т. А. Бурмистрова. 3-е изд. М.: Просвещение, 2014. 83 с.
5. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Математика: 6 кл. М.: Мнемозина, 2015. 161 с.
6. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Математика: 6 кл. М.: Просвещение, 2015. 256 с.
7. Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. Математика: 6 кл. М.: Просвещение, 2015. 256 с.