

## ЕДИНСТВО МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Юрченко Д.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГКОУ «Пермское президентское кадетское училище им. Героя России Ф. Кузьмина войск национальной гвардии Российской Федерации», Пермь, e-mail: yurchenko.dasha@mail.ru

В данной статье с различных сторон представлена характеристика понятия «единство математических знаний обучающихся». Анализ научной и методической литературы показал, что данное понятие рассматривается в трудах исследователей преимущественно с трех позиций: 1) единство чистой и прикладной математики; 2) единство математики в ее языке и связи между внутренним содержанием математического факта и его внешним выражением; 3) формальная общность структур современной математики и связь между различными математическими разделами и дисциплинами. На основании интеграции этих позиций автором сформулировано определение понятия «единство математических знаний обучающихся», приводится описание структуры данного понятия, в которой выделяются два основания: аксиологическое и гносеологическое, а также описываются компоненты, входящие в указанные основания, такие как компонент целеполагания, когнитивный, интеграционный, практический и рефлексивный компоненты. Кроме того, в данной статье обосновывается важность формирования единства математических знаний для глубокого и полного понимания школьниками смысла изучаемого материала, установления существенных связей между основными математическими понятиями в рамках одного раздела, а также между содержанием различных математических дисциплин.

Ключевые слова: единство математических знаний, единство теоретической и прикладной математики, единство математического языка, интеграция, структура единства математических знаний, модель единства математических знаний.

## UNITY OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF STUDENTS

Yurchenko. D.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>FGCOU «Perm Presidential Cadet School of the National Guard Troops of the Russian Federation named after the Hero of Russia Fyodor Kuzmin», Perm, e-mail: yurchenko.dasha@mail.ru

In this article, the characteristic of the concept of «unity of mathematical knowledge of students» is presented from various positions. The analysis of scientific and methodological literature has shown that this concept is considered in the works of researchers mainly from three positions: the unity of pure and applied mathematics, the unity of mathematics in its language and the relationship between the internal content of a mathematical fact and its external expression, the formal commonality of the structures of modern mathematics and the relationship between different mathematical sections and disciplines. Based on the integration of these positions, the definition of the concept of "unity of mathematical knowledge of students" is formulated, and also a description of its structure is given, in which two bases are distinguished: axiological and epistemological, the components included in these foundations, such as the goal-setting, cognitive, integration, practical and reflective components are highlighted. In addition, the necessity of forming the unity of mathematical knowledge of students in order to comprehend the adequate meaning of the studied material, establish significant links between the basic concepts within one section, as well as between the contents of various mathematical disciplines.

Keywords: unity of mathematical knowledge, unity of theoretical and applied mathematics, unity of mathematical language, integration, structure of unity of mathematical knowledge, model of unity of mathematical knowledge.

Принятая в РФ концепция развития математического образования предусматривает, что изучение математических дисциплин должно осуществляться с помощью преемственности их содержания на всех уровнях реализации. Сюда также относится усиление межпредметных связей с естественными, социальными, гуманитарными науками. В действительности часто учебная деятельность школьников на уроках математики достаточно выборочна и направляется, прежде всего, на сдачу выпускных экзаменов и отработку тех

заданий, разделов и тем, которые даются в различных контрольно-измерительных материалах. Такой избирательный подход приводит к разорванности усвоения математических понятий и к слабому представлению об общей структуре математических дисциплин, неумению видеть целостность и связи различных разделов алгебры, геометрии, математического анализа и т.д.

Как следствие, многие учащиеся способны решать только типовые задачи, строить модели только по известным алгоритмам. Математические дисциплины воспринимаются школьниками *обособленно*, поэтому знания усваиваются достаточно формально, приобретенные навыки быстро забываются, что становится препятствием в динамике развития математических способностей [1]. В связи с этим педагогу в процессе обучения важно постоянно демонстрировать устойчивую взаимосвязь различных областей математики в единой системе научного знания, показывать единство математики как науки.

Цели исследования: определение понятия «единство математических знаний обучающихся», установление и описание компонентов его структуры.

#### **Материалы и методы исследования**

Анализ научной и методической литературы на предмет того, что понимать под единством математических знаний обучающихся. Систематизация и обобщение полученного материала для определения данного понятия.

#### **Результаты исследования и их обсуждение**

В ходе анализа научной и методической литературы было выявлено, что среди ученых нет общего мнения относительно того, что понимать под единством математических знаний обучающихся. Преимущественно данное понятие рассматривается с трех позиций: единство чистой и прикладной математики, единство математики в ее языке и связи между внутренним содержанием математического факта и его внешним выражением, с позиции формальной общности структур современной математики и связи между различными ее разделами [2].

Единство чистой и прикладной математики рассматривается в трудах таких ученых, как Л.Д. Кудрявцев, С.Л. Соболев, Б.В. Гнеденко, М.И. Башмаков, М.В. Потоцкий, А.А. Столяр, В.В. Репьев, Б.И. Крельштейн, В.А. Тестов, С.Н. Дорофеев, Н.С. Подходова и др. Общим мнением исследователей можно считать то, что развитие математики как науки и математического образования в целом признается ими только во взаимосвязи теоретической и прикладной составляющей.

Важным считается мнение Л.Д. Кудрявцева о единстве математики, что деление математики на чистую и прикладную очень условно, так как чистая и прикладная математика являются частями единого неразрывного целого и эти части невозможно жестко изолировать одну от другой. Под чистой математикой ученым понимается та часть математики, в которой математические модели изучаются абстрактно, устанавливаются общие методы и алгоритмы

решения широкого круга задач. К прикладной математике можно отнести изучение математических моделей, практически моделирующих те или иные реальные процессы или явления [3].

Академик Б.В. Гнеденко отмечает, что повышенное внимание к обучению математике в общеобразовательных и специальных учебных заведениях связано с практическими потребностями, так как математика является незаменимым орудием познания окружающего мира, методы, которой позволяют, не проводя экспериментов, предвидеть протекание явлений, производить заблаговременные расчеты [4].

В современной действительности, когда интеграция наук усиливается, растет и необходимость формирования возможно более точного представления обучающихся об окружающем мире. Объединяющей идеей различных исследований является то, что одной из основных задач математического образования является формирование целостной системы научных знаний школьников, а основой такого формирования должно быть воспитание умения исследовать явления реального мира с помощью математики [5]. В.А. Тестов отмечает происхождение математических задач из прикладной составляющей и важность иллюстрирования обучающимся широких возможностей математических средств познания для исследования практических проблем естественно-научных дисциплин, но с сохранением логической структуры и строгости изложения предмета [6].

Особое внимание в исследованиях ученых уделяется пониманию роли математики в современном мире, а также раскрытию возможностей для профессионального самоопределения учащихся, придающего направленность личностному развитию и утверждению жизненной позиции [7]. Особенно эта тенденция усилилась в последнее время в связи с реализацией в школах вариативных образовательных программ и введения профильного обучения в старших классах.

Как отмечает И.А. Иванов, современная модель обучения математике должна реализовываться в неразрывном единстве теоретической и практической составляющих математики как науки, но с постепенным усилением роли практических навыков. Кроме того, отбор содержания учебных курсов на базе профильного обучения должен происходить с учетом возможностей последующего использования учащимися полученных знаний и опыта при освоении ими смежных учебных дисциплин (физики, информатики, биологии, химии и т.д.) на профильном уровне и при подготовке к получению профессионального образования в дальнейшем. При этом не следует пренебрегать системностью, строгостью и полнотой фундаментальной математики для усиления ее прикладной направленности [8].

Таким образом, результатом освоения обучающимися предметов математического цикла должны стать, во-первых, понимание единства, неразрывности и взаимопроникновения

математической теории и практики, математических механизмов исследования материального мира, во-вторых, способность применять полученные теоретические знания в общеобразовательной и будущей профессиональной деятельности, с помощью средств классической математики решать задачи смежных наук [9].

О единстве математики в ее языке и связи между внутренним содержанием математического факта и его внешним выражением (словесным, символическим, наглядно-образным) писали Г.М. Хинчин, Л.И. Токарева, И.О. Харитонов, Е.А. Коростелева и др.

Анализ научной литературы показал, что многие авторы выделяют следующую проблему: учащиеся при усвоении предметного учебного материала хорошо справляются с вычислениями на базе различных математических понятий, но не понимают сути этих понятий и не могут связать между собой их смыслы [10]. А.Я. Хинчин отмечает, что внешнее выражение математического факта у обучающихся господствует над внутренним его содержанием. Например, ученик решает некоторую систему уравнений с переменными  $x$  и  $y$ , при этом не в состоянии решить эту же систему, если обозначить в ней переменные  $k$  и  $l$ . Таким образом, объектом изучения должен быть сам факт и его внутреннее содержание, а внешняя форма есть только средство для усвоения, запоминания и передачи информации обучающимся о данном математическом понятии [1].

Математика оперирует абстрактными объектами. Математический язык – это формальный язык, он выражается знаками (символами). При обучении математике перед педагогом стоит задача обучить владению этим знаково-символьным языком, имеющим высокий уровень обобщенности, чтобы в дальнейшем у школьника была возможность его применения не только к частным задачам математики, а к широкому кругу естественно-научных дисциплин. Отмечается, что по мере изучения курса математики язык становится все более строгим, а восприятие математических объектов – все более абстрактным, и основная трудность для обучающегося заключается в умении увидеть за нематериальным математическим понятием конкретный образ, математический факт, установить связь его с реальной действительностью [10].

Положение о многообразии и единстве компонентов математического языка в обучении является основным инструментом современных внутрипредметных связей математики. Игнорирование проблемы языков при изучении теории и выполнении практических заданий влечет исчезновение возможности перевода задачи на адекватный язык. Таким образом, требования о взаимосвязи методов и разделов курса математики остаются не реализованными в преподавании. Математический объект может быть представлен разными способами (словесным, знаково-символьным, образно-графическим, тактильно-кинестическим), поэтому учащемуся для формирования целостного восприятия необходимо

владеть разными способами такого представления и иметь навык переходить от одного способа к другому для постижения смысла данного понятия, его существенных свойств и быть готовым к практическому применению сформированных знаний в окружающем мире и смежных дисциплинах.

О связи между различными математическими дисциплинами писали следующие ученые: И.Ф. Слудский, А.Я. Хинчин, П.А. Ларичев, Я.С. Дубнов, И.В. Арнольд, Б.И. Крельштейн, Л.И. Божович, Е.И. Смирнов, К.Н. Лунгу, Н.В. Измайлова, Н.В. Борисова, В.С. Абатурова, В.В. Богун, А.М. Маскаева др.

Анализируя данную методическую литературу, можно сделать вывод, что одна из серьезнейших проблем современного обучения математике состоит в том, что не всегда освоение конкретного математического раздела встраивается в имеющуюся систему знаний обучающихся. Большая часть пройденного программного материала быстро забывается, представление о математических понятиях составляют слабо связанные между собой формально заученные сведения, существующие в понимании школьников изолированно от других ранее усвоенных определений, теорем и иного, плохо закреплены навыки выполнения стандартных математических операций и типовых заданий. Часто выпускники средних образовательных учреждений не имеют осознания математики как единой науки со своим предметом и методом [11].

Можно выделить некоторые способы, позволяющие преодолеть разобщенность разных математических дисциплин, изолированность отдельных разделов и тем.

Одним из них является направление, называемое «аксиоматический метод». Аксиоматическое построение теории начинают с установления системы неопределяемых (первичных) понятий, отношений и аксиом. Каждое новое понятие теории посредством определений сводится к основным (неопределяемым) понятиям; каждое новое положение доказывается логически только с помощью принятых аксиом.

Другим способом, как отмечают А.Н. Колмогоров и другие крупнейшие ученые, позволяющим обеспечивать целостное единство в математическом обучении, являются математические структуры. При этом с целью преодоления формализма в обучении и недопущения примитивного усвоения знаний без понимания необходимо выделять для обучающихся последовательные этапы в формировании понятий о математических структурах, опираясь при этом на нижележащие, более конкретные уровни, ступени научного познания. Поэтапность процесса формирования основных математических понятий является необходимым условием реализации принципа доступности обучения [11].

Еще одно важное понятие, благодаря которому математика предстает как единая наука, – это прямые интегративные связи. *Интеграция* – это процесс развития, связанный с

объединением в целое ранее разнородных частей и элементов. Под интеграцией в обучении понимается «процесс взаимосвязи и синтеза знаний, способов и видов деятельности с образованием целостной системы» [12, с. 289]. Таким образом, процесс формирования единства математических знаний обучающихся должен включать интегративный подход к обучению, т.е. ориентированный на учебные задачи, решение которых требует применения системных знаний и обобщенных умений, системного стиля мышления [13].

В монографии Е.И. Смирнов выделяет четыре уровня интеграционных связей между учебными элементами: локальные (связь между фактами в границах одного понятия), частносистемные (связь между отдельными понятиями, теоремами в границах одной теории), внутрисистемные (связь между отдельными теориями данного предмета), межсистемные (связь между темами учебных дисциплин) [12]. А.Я. Хинчин указывает, что разбиение учебного материала одного курса на самостоятельные темы делает обучение систематическим, а знания учащихся – более прочными и глубокими. Однако по большей части такое разбиение воспринимается преподавателями буквально, т.е. по принципу «прошли – сдали – забыли». Ученый приводит яркий пример: идея функциональной зависимости красной нитью проходит через все разделы элементарной математики, поэтому введение уравнений первой степени без изучения линейной функции, квадратных – без квадратичной и так далее является причиной менее доходчивого, конкретизированного и ясного изложения материала. Таким образом, по мнению Хинчина, необходимо реализовывать возможность наглядно демонстрировать обучающимся взаимосвязь учебного материала как в рамках одного предмета, так и между различными математическими дисциплинами [1].

Проанализировав работы указанных выше авторов, можно следующим образом определить понятие «**единство математических знаний**». Это целостное восприятие обучающимися математики как учебного предмета, характеризующееся высоким уровнем овладения необходимыми ЗУН, наличием целевой установки получаемых знаний, пониманием интегративных связей между ними на всех уровнях системообразующих процессов, умением применять полученные знания для решения задач различного уровня сложности, а также задач, поставленных жизнью.

Исходя из данного определения, в *структуре* понятия единства математических знаний можно выделить два основания: аксиологическое и гносеологические. Аксиологическое основание включает компонент целеполагания, под которым подразумевается смысловое осознание обучающимися цели введения понятий и теорем каждой темы, их значимости в связи с другими понятиями в рамках теоретического материала и для успешного решения практических задач, осознание обучающимися ценности

получаемых математических знаний, опыта собственной деятельности на уроках математики, а также при самостоятельной подготовке.

В гносеологическом основании можно выделить следующие компоненты: когнитивный, интеграционный, практический и рефлексивный.

Когнитивный компонент характеризуется совокупностью знаний, умений и навыков в изучаемой и ранее изученных школьниками областях математики, а также возможностью давать учащимися адекватную оценку своим способностям и уровню математической подготовки, а кроме того – уровнем овладения формально-логическим языком математики, сформированностью знаково-символических действий.

Интеграционный компонент включает установление взаимосвязей и синтеза основных математических понятий, способов и видов учебной деятельности, направленных на формирование целостной системы математических знаний обучающихся, а именно формирование систематичности усвоения новых знаний, постоянного обобщения предыдущего программного материала и опыта деятельности учащихся для перехода на следующую ступень обучения, синтезирование знаний нескольких учебных тем, выявление особых структурных связей между ними, как следствие – выстраивание общей системы знаний по предмету, в которой содержание каждой темы сопряжено с содержанием предыдущей.

Практический компонент характеризуется способностью обучающихся применять полученные знания и умения для выполнения заданий различного уровня сложности (репродуктивных, продуктивных, творческих, олимпиадных), умением выделять математическую ситуацию из множества других и описывать ее на языке математики, а также наличием ценностного и практического опыта для решения прикладных и профессиональных задач. Под рефлексивным компонентом подразумевается способность обучающихся прогнозировать и адекватно оценивать результаты собственной образовательной деятельности.

### **Заключение**

Таким образом, обучение с постоянной ориентировкой на формирование единства математических знаний обучающихся способствует пониманию ими общей структуры математической дисциплины, видению целостности и связи ее составных частей, что представляет собой путь к осознанности и обобщенности изучаемого материала, а также к исключению формального характера образовательного процесса. Для этого необходимо выстроить такую дидактическую систему работы, которая бы отражала интеграционные связи математических объектов на различных уровнях, способствовала повышению степени владения школьниками знаково-символическим аппаратом математики, а также отражала практическую значимость изучаемого материала в реальной жизни.

## Список литературы

1. Хинчин А.Я. О формализме в школьном преподавании математики // Известия академии педагогических наук РСФСР. 1946. № 4. С. 7-20.
2. Михайлова Н.В. Обоснование современной математики: системно-методологический подход: автореф. дис. ... докт. филос. наук. Москва, 2017. 46 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. М.: Наука, 1977. 111 с.
4. Гнеденко Б.В. Прикладные аспекты в преподавании математики // Математическое образование сегодня (Серия «Математика, кибернетика»). 1974. № 6. С. 30-52.
5. Мирзоев М.С. Математическая культура учителя информатики. М.: Прометей, 2015. 303 с.
6. Тестов В.А. Решение задач как основное средство развития математического мышления // Математический вестник Вятского государственного университета. 2022. № 1. С. 57-61.
7. Лурье М.Л. Концептуальные основы интеграции естественно-математического образования в системе "школа - вуз" на довузовском уровне // Педагогическое образование в России. 2016. № 1. С. 13-18.
8. Иванов И.А. Модель обучения алгебре и началам анализа для профилей естественнонаучного направления на основе логики прикладной математики: автореф. дис. ... докт. пед. наук. Санкт-Петербург, 2011. 53 с.
9. Коновалова И.Н. Диалектическое единство теоретической и прикладной математики как основа профессионализации математической подготовки специалиста экономического профиля // Балтийский гуманитарный журнал. 2020. № 2. С. 99-102.
10. Солдаева М.В. Обучение теоретической составляющей курса алгебры и начал анализа на основе целостного подхода: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Санкт-Петербург, 2014. 23 с.
11. Тестов В.А. Особенности формирования у школьников основных математических понятий в современных условиях // Концепт. 2014. № 12. [Электронный ресурс]. URL: <http://e-koncept.ru/2014/14333.htm> (дата обращения: 18.01.2023).
12. Смирнов Е.И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога: монография. Ярославль: Канцлер, 2012. 665 с.
13. Бурзалова Т.В. Личностно-ориентированный и деятельностный подходы к профессиональному развитию будущего учителя математики и информатики // Вестник бурятского государственного университета. 2014. № 1. С. 72-75.